Invarianten von Auslander-Reiten-Komponenten für wilde Kronecker-Köcher

Daniel Bissinger

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Kiel, 19. Oktober 2017

Überblick

Erbliche Algebren

- Sei k stets ein algebraisch abgeschlossener Körper und Λ eine endliche-dimensionale k-Algebra.
- Es bezeichnen $\operatorname{mod}\Lambda$ die Kategorie der endlich-dimensionalen Λ-Links-Moduln und $\operatorname{ind}\Lambda \subseteq \operatorname{mod}\Lambda$ ein Repräsentantensystem der Isomorphietypen unzerlegbarer Λ-Moduln.
- Ein unzerlegbarer Modul $M \in \operatorname{mod}\Lambda$ heißt **projektiv**, falls M isomorph zu einem direkten Summanden von Λ ist. Ein Modul $N \in \operatorname{mod}\Lambda$ heißt projektiv, falls er direkte Summe von projektiv unzerlegbaren Moduln ist.
- Die Algebra Λ heißt **erblich**, falls die Untermoduln projektiv unzerlegbarer Moduln wieder projektiv sind.

Erbliche Algebren

Beispiele für erbliche Algebren

1. $\Lambda = k$
2. $\mathrm{Mat}_{2x2}(k) = \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & k \end{pmatrix}$
3. Sei $r \geq 1$ und $\mathcal{K}_r := \begin{pmatrix} k & k^r \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & k^r \\ 0 & k \end{pmatrix}$

Ein Beispiel einer nicht erblichen Algebra

- $k[X]/(X^2)$ ist nicht erblich, da $(X + (X^2))$ nicht projektiv ist.

Gabriels Theorem

Die Modulkategorie einer erblichen Algebra lässt sich durch einen gerichteten Graphen und lineare Algebra beschreiben.

Köcher und Darstellungen

- Ein (schleifenfreier) **Köcher** $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ ist ein gerichteter Graph mit Knotenmenge Q_0, Pfeilmenge Q_1 und Funktionen $s, t\colon Q_1 \to Q_0$, die für jeden Pfeil $\alpha \in Q_1$ den Anfangs- und Endpunkt angeben, mit der Eigenschaft $s(\alpha) \neq t(\alpha)$ für alle $\alpha \in Q_1$.
  Beispiele: $\circ$, $\circ \to \circ$, $\circ \to \circ \leftleftarrows \circ$
- Eine (endlich-dimensionale) **Darstellung** M für einen Köcher Q ist ein Tupel $M = ((M_x)_{x \in Q_0}, (M(\alpha))_{\alpha \in Q_1})$ mit Vektorräumen M_x und linearen Abbildungen $M(\alpha)\colon M_{s(\alpha)} \to M_{t(\alpha)}$ sodass $\sum_{x \in Q_0} \dim_k M_x < \infty$.
- Ein **Morphismus** $f\colon M \to N$ von Darstellungen M, N ist eine Familie $f = (f_x\colon M_x \to N_x)_{x \in Q_0}$ von linearen Abbildungen sodass für jeden Pfeil $\alpha\colon x \to y$ das folgende Diagram kommutiert:

$$\begin{tikzcd} M_x \arrow[r, "M(\alpha)"'] \arrow[d, "f_x"] & M_y \arrow[d, "f_y"'] \\ N_x \arrow[r, "N(\alpha)"] & N_y \end{tikzcd}$$

Gabriels Theorem für erbliche Algebren

Wir bezeichnen mit $\operatorname{rep}(Q)$ die Kategorie der Darstellungen von Q.

Theorem (Gabriel 1980)

Sei Λ eine erbliche Algebra, dann existiert ein schleifenfreier Köcher Q_Λ sodass $\operatorname{mod}\Lambda \cong \operatorname{rep}(Q_\Lambda)$.

Beispiele

1. $\Lambda = k$, dann gilt $Q_\Lambda = \circ$.
2. Sei $r \geq 1$ und $\mathcal{K}_r = \begin{pmatrix} k & k^r \\ 0 & k \end{pmatrix}$, dann ist

$$\Gamma_r := Q_{\mathcal{K}_r} = \begin{tikzcd} \underset{1}{\circ} \arrow[r, bend left, "\gamma_1"] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[r, bend right, "\gamma_r"'] \arrow[r] & \underset{2}{\circ} \end{tikzcd}.$$

Γ_r heißt **Kronecker-Köcher** mit r Pfeilen.

Unzerlegbare Darstellungen

Wir bezeichnen für einen Köcher Q mit $\mathrm{ind}(Q)$ ein vollständiges Repräsentantensystem von unzerlegbaren Darstellungen. Es gilt

1. $\mathrm{ind}(\circ) = \{k\}$.
2. $\mathrm{ind}(\Gamma_1) = \mathrm{ind}(\circ \longrightarrow \circ) = \{k \longrightarrow 0, 0 \longrightarrow k, k \xrightarrow{\mathrm{id}_k} k\}$.
3. Für $r = 2$ und $\lambda \in k$ ist die Darstellung

$$M_\lambda := \begin{tikzcd} k \arrow[r, bend left, "\lambda\cdot\mathrm{id}_k"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{id}_k"'] & k \end{tikzcd} \in \mathrm{rep}(\Gamma_2)$$

unzerlegbar und es gilt $M_\lambda \ncong M_\mu$ für alle $\mu \neq \lambda$.

$\overset{|k|=\infty}{\Longrightarrow} |\mathrm{ind}(\Gamma_r)| = \infty$ für $r \geq 2$.

Wilder Darstellungstyp

- Die Kategorie $\operatorname{rep}(\Gamma_2)$ ist klassifiziert (Kronecker).
- Für $r \geq 3$ ist $\operatorname{rep}(\Gamma_r)$ nicht klassifiziert.
- Die Algebren $\mathcal{K}_2$ und $\mathcal{K}_3$ unterscheiden sich im **Darstellungstyp**.

Definition

Eine erbliche Algebra Λ heißt **wild**, falls für jede endlich-dimensionale k-Algebra B ein k-linearer volltreuer und exakter Funktor $\mathcal{F}\colon \operatorname{mod} B \to \operatorname{mod} \Lambda$ existiert.
$\Rightarrow$ $\operatorname{mod} B$ lässt sich als volle Unterkategorie von $\operatorname{mod} \Lambda$ auffassen.

Theorem (Brenner, Donovan, Drozd, Freislich, Gabriel 1973-1977)

Die Kronecker Algebra $\mathcal{K}_r$ ist wild genau dann, wenn $r \geq 3$.

Der Auslander-Reiten-Köcher

Definition

Der **Auslander-Reiten-Köcher** von Q ist der (schleifenfreie) Köcher mit:

- Knoten: Repräsentantensystem von unzerlegbaren Darstellungen.
- Pfeilen : $M \to N :\Leftrightarrow$ Es existiert ein **irreduzibler** Morphismus $f\colon M \to N$.

AR-Köcher von Γ_1

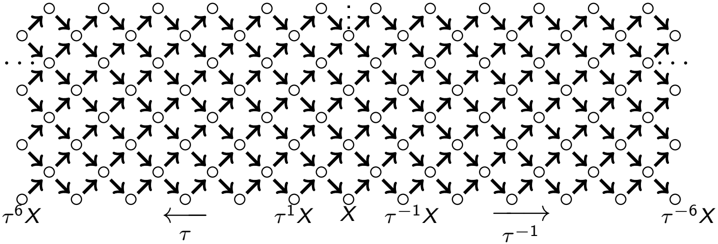
$$\begin{tikzcd} & k \to k \arrow[dr] & \\ k \to 0 \arrow[ur] & & 0 \to k \end{tikzcd}$$

Der Auslander-Reiten-Köcher für Γ_r, $r \geq 3$

Theorem (Ringel 1978)

Sei $r \geq 3$ und $\mathcal{Z}(\Gamma_r)$ die Menge der Zusammenhangskomponenten des Auslander-Reiten-Köchers von Γ_r. Es gelten die folgenden Aussagen.

1. *Alle bis auf zwei Komponenten in $\mathcal{Z}(\Gamma_r)$ sind vom Typ $\mathbb{Z}A_\infty$ (regulär).*
2. *Es gibt eine Bijektion $\varphi\colon k \to \mathcal{Z}(\Gamma_r)$.*



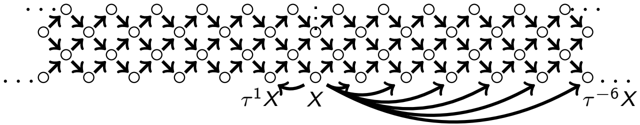
Der Quasi-Rang von $\mathcal{C}$

Sei $\mathcal{C}$ eine reguläre Komponente von Γ_r und $X \in \mathcal{C}$ quasi-einfach, dann existiert ein (nicht invertierbarer) Morphismus $0 \neq f\colon X \to \tau^1 X$.

- Wann findet man in τ^{-1}-Richtung keine Morphismen mehr?

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}(\mathcal{C}) :&= \min\{l \in \mathbb{Z}_{\leq 1} \mid \mathrm{rad}(X, \tau^l X) \neq 0\}\\ &= \min\{l \in \mathbb{Z}_{\leq 1} \mid \forall m \in \mathbb{Z}, m \geq l\colon\ \mathrm{rad}(X, \tau^m X) \neq 0\}\end{aligned}$$

ist wohldefiniert und heißt der **Quasi-Rang** von $\mathcal{C}$.



Theorem (Kerner, Lukas 1991)

Es gilt $\inf\{\mathrm{rk}(\mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \text{ reguläre Komponente }\} = -\infty$.

Die Weite $\mathcal{W}(\mathcal{C})$ von $\mathcal{C}$

Sei $N \in \operatorname{rep}(\Gamma_3)$ die (unzerlegbare) Darstellung

$$N = \begin{tikzcd} k \arrow[r, bend left, "\gamma_1"] \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[r, bend right, "\gamma_3"'] & k^2 \end{tikzcd} \qquad N(\gamma_1)=[1,0]^t, N(\gamma_2)=[0,1]^t, N(\gamma_3)=[1,1]^t.$$

Die Abbildungen $N(\gamma_i)$ sind injektiv, aber $N(\gamma_1) + N(\gamma_2) - N(\gamma_3) \equiv 0$.

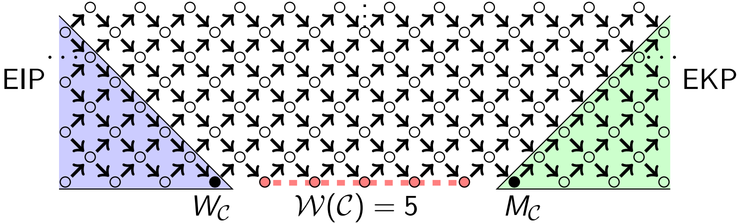
$$\Rightarrow \text{EKP} := \{M \mid \forall \alpha \in k^r \setminus \{0\} \colon \ \ker(\textstyle\sum_{i=1}^r \alpha_i M(\gamma_i)) = \{0\}\}$$
$$\text{EIP} := \{M \mid \forall \alpha \in k^r \setminus \{0\} \colon \ \operatorname{im}(\textstyle\sum_{i=1}^r \alpha_i M(\gamma_i)) = M_2\}$$

Theorem (Worch 2013)

Sei $\mathcal{C}$ eine reguläre Komponente von Γ_r, dann existieren eindeutig bestimme quasi-einfache Darstellungen $M_\mathcal{C}$ und $W_\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}$ mit

1. $\text{EIP} \cap \mathcal{C} = (\to W_\mathcal{C})$, $\text{EKP} \cap \mathcal{C} = (M_\mathcal{C} \to)$,
2. $\text{EKP} \cap \text{EIP} = \{0\}$.

Die Weite $\mathcal{W}(\mathcal{C})$ von $\mathcal{C}$



Korollar

Es gilt $\sup\{\mathcal{W}(\mathcal{C}) \mid \mathcal{C}$ *reguläre Komponente* $\} = \infty$.

Satz (Worch 2013, B 2016)

Sei $\mathcal{C}$ eine reguläre Komponente, dann gilt

$$-\mathcal{W}(\mathcal{C}) \leq \mathrm{rk}(\mathcal{C}) \leq -\mathcal{W}(\mathcal{C}) + 3.$$

Berechenbarkeit von $\mathrm{rk}(\mathcal{C})$ und $\mathcal{W}(\mathcal{C})$.

Welche Invariante lässt sich "besser" bestimmen?

Im Allgemeinen lassen sich die Invarianten leider gleich "schlecht" bestimmen. Bekannt sind reguläre Komponenten mit Weite $0, 1, 2$.

Idee

Studiere die Unterkategorie $\mathrm{rep}_{gr}(\Gamma_r) \subseteq \mathrm{rep}(\Gamma_r)$ der Moduln, die sich überlagern lassen.

Theorem (B. 2017)

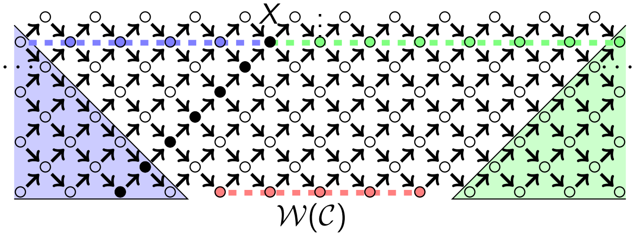
Sei $r \geq 3$ und $n \in \mathbb{N}_0$, dann existiert eine Bijektion

$$\varphi_n \colon k \to \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ reguläre Komponente}, \mathcal{W}(\mathcal{C}) = n\}.$$

Für $n > 0$ sind die Darstellungen in den konstruierten Komponenten graduierbar durch eine freie Gruppe von Rang $r - 1$.

Alternative Berechnung von $\mathcal{W}(\mathcal{C})$

Sei $\mathcal{C}$ eine reguläre Komponente und $X \in \mathcal{C} \setminus \mathrm{EIP} \cup \mathrm{EKP}$.



Es bezeichne $d^l(X)$ den Abstand von X zu $\mathrm{EIP} \cap \mathcal{C}$, $d^r(X)$ den Abstand von X zu $\mathrm{EKP} \cap \mathcal{C}$ und $h(X)$ die "Höhe" von X in $\mathcal{C}$, dann gilt

$$\mathcal{W}(\mathcal{C}) = d^l(X) + d^r(X) - h(X).$$

Alternative Berechnung von $\mathcal{W}(\mathcal{C})$

Lemma

Sei $0 \to A \to B \to C \to 0$ *eine kurze exakte Sequenz mit unzerlegbaren Darstellungen* $A, B, C \notin \mathrm{EIP} \cup \mathrm{EKP}$. *Dann gilt*

1. $d^l(C) \leq d^l(B) \leq \max\{d^l(A), d^l(C)\}$ *und*
2. $d^r(A) \leq d^r(B) \leq \max\{d^r(A), d^r(C)\}$.

$\Rightarrow$ Für $A = C$ ist $d^l(A) = d^l(B)$, $d^r(A) = d^r(B)$ und damit

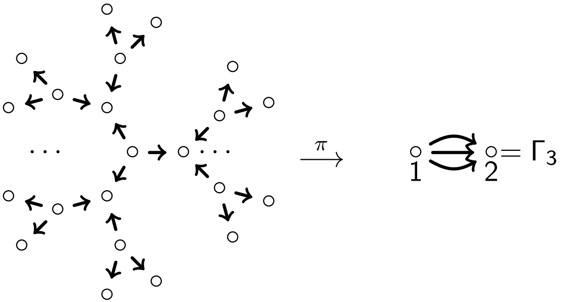
$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\mathcal{C}_B) &= d^l(B) + d^r(B) - h(B) \\ &= d^l(A) + d^r(A) - h(A) + h(A) - h(B) \\ &= \mathcal{W}(\mathcal{C}_A) + h(A) - h(B). \end{aligned}$$

Beweisidee

Konstruiere $0 \to A \to B \to A \to 0$, sodass $h(B)$ kontrollierbar bleibt.

Die universelle Überlagerung von Γ_r

Es sei C_r der r-reguläre unendliche Baum mit bipartiter Orientierung:



Die Fundamentalgruppe $G := \pi_\lambda(\Gamma_r, 1)$ operiert auf C_r mit Bahnengraph $C_r/G \cong \Gamma_r$. Es sei π der zugehörige Köchermorphismus.

Von rep(C_r) zu rep(Γ_r)

Definition

Es sei $M \in \operatorname{rep}(C_r)$ eine Darstellung. Die Menge $\operatorname{supp}(M) := \{x \in (C_r)_0 \mid \dim_k M_x \neq 0\}$ heißt der **Träger** von M.

Es G operiert auf rep(C_r) durch Verschiebung des Trägers: $(M^g)_x := M_{g.x}$, d.h. $\operatorname{supp}(M) = g.\operatorname{supp}(M^g)$.

Theorem (Gabriel 1981)

Es existiert ein exakter (und anschaulicher) Funktor $\pi_\lambda\colon \operatorname{rep}(C_r) \to \operatorname{rep}(\Gamma_r)$ *mit den folgenden Eigenschaften.*

1. π_λ *erhält Unzerlegbarkeit.*
2. $\pi_\lambda(M^g) \cong \pi_\lambda(M)$ *für alle* $M \in \operatorname{rep}(C_r)$, $g \in G$.

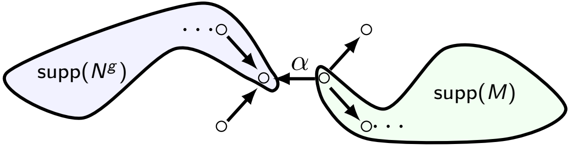
Definition

- Für einen Knoten x bezeichne $n(x)$ die **Nachbarschaft** von x in C_r.
- Ein Element $y \in \operatorname{supp}(M)$ heißt **Blatt** von M, falls $|n(y) \cap \operatorname{supp}(M)| \leq 1$.

Lemma

Seien $M, N \in \operatorname{rep}(C_r)$ unzerlegbar mit Blättern $x \in \operatorname{supp}(M)$,$y \in \operatorname{supp}(N)$, wobei x eine Quelle und y eine Senke ist. Es existiert $g \in G$, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind.

- $\operatorname{supp}(M) \cap \operatorname{supp}(N^g) = \emptyset$,
- $z := g^{-1}y \in n(x)$, *d.h. es existiert ein Pfeil* $\alpha\colon x \to z$.



Seien M, N und $g \in G$ wie eben und $0 \neq f \colon M_x \to (N^g)_z$. Wir definieren die Darstellung $N^g *_f M$ gegeben durch

- $\operatorname{supp}(N^g *_f M) := \operatorname{supp}(N^g) \cup \operatorname{supp}(M)$,
- $(N^g *_f M)_X \cong X$ für $X \in \{M, N^g\}$ und
- $(N^g *_f M)(\alpha) := f$.

Lemma

$N^g *_f M$ ist eine unzerlegbare Darstellung und es existiert eine natürliche exakte Folge $\delta := 0 \to N^g \to N^g *_f M \to M \to 0$.

Satz

Sei $M = N$ und $A := \pi_\lambda(M)$ und $B := \pi_\lambda(M^g *_f M)$. Die Folge δ liefert eine kurze exakte Sequenz $0 \to A \to B \to A \to 0$. Diese erfüllt unsere Anforderungen, d.h. wir finden eine reguläre Komponente der Weite $\mathcal{W}(\mathcal{C}_B) = \mathcal{W}(\mathcal{C}_A) + h(A) - h(B)$.

Bemerkung

Die Höhe $h(B)$ lässt sich so noch nicht kontrollieren.

Danke für die Aufmerksamkeit.