Fast zerfallende Folgen für Komodul-Algebren

Masterarbeit
im 1-Fach Masterstudiengang Mathematik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

vorgelegt von
Christian Drenkhahn

Erstgutachter: Prof. Dr. Rolf Farnsteiner
Zweitgutachter: Prof. Dr. Richard Weidmann

Kiel im November 2012

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Diese Arbeit befasst sich mit der Darstellungstheorie endlichdimensionaler $\mathbb{Z}^n$-graduierter Algebren. Unser Hauptziel ist es, die Existenz fast zerfallender Folgen in der Kategorie der endlichdimensionalen graduierten Moduln über einer solchen Algebra zu beweisen.

Die ersten, die sich mit der Darstellungstheorie graduierter Algebren beschäftigten, waren Gordon und Green in ihren beiden 1982 erschienenen Artikeln [9] und [10]. Teil der Motivation von Gordon und Green war es, durch die Untersuchung der graduierten Moduln über einer graduierten Algebra Λ Informationen über alle Λ-Moduln zu erhalten. Sie betrachten in ihren Artikeln $\mathbb{Z}$-graduierte Artin-Algebren und beweisen die Existenz fast zerfallender Folgen in der Kategorie der (endlich erzeugten) graduierten Moduln. Dazu definieren sie eine passende volle Unterkategorie und zeigen, dass diese Kategorie äquivalent zur Kategorie der (endlich erzeugten) Moduln über einer Artin-Algebra ist. Dieses Resultat wird dann im Existenzbeweis benutzt. In jüngerer Zeit traten $\mathbb{Z}^n$-graduierte Algebren und Moduln in der Darstellungstheorie reduktiver algebraischer Gruppen in positiver Charakteristik bei der Untersuchung von G_rT-Moduln auf. Leider kann der Beweis von Gordon und Green für oben genannte Äquivalenz und für den Existenzsatz nicht ohne Mehraufwand auf $\mathbb{Z}^n$-graduierte Algebren für $n > 1$ ausgedehnt werden. In seiner Vortragsreihe [6] benutzt Farnsteiner einen Satz von Gabriel, um eine Äquivalenz auch für diesen Fall zu erhalten, und skizziert dann einen Beweis des Existenzsatzes für endlichdimensionale $\mathbb{Z}^n$-graduierte Algebren. Ziel dieser Arbeit ist es, den relevanten Teil der Arbeit [8] von Gabriel auszuarbeiten, um einen möglichst einfachen Beweis der oben genannten Äquivalenz zu erhalten, und einen vollständigen Beweis des Existenzsatzes zu liefern. Bei der logischen Struktur des Beweises der Äquivalenz gehen wir ähnlich vor wie Munstermann in ihrer Staatsexamensarbeit [11].

Im ersten Kapitel stellen wir Grundlagen über Algebren, Moduln und Kategorien zur späteren Verwendung bereit. Für Beweise verweisen wir auf die Standardliteratur, etwa [2], [3], [15] und [4].

Im zweiten Kapitel führen wir in die Darstellungstheorie von $\mathbb{Z}^n$-graduierten Algebren ein. Dabei folgen wir dem Zugang in [6], gehen aber zunächst etwas allgemeiner vor und betrachten G-graduierte Algebren für eine beliebige Gruppe G, solange dies möglich ist.

Im dritten Kapitel stellen wir zunächst einige Hilfsmittel aus der Arbeit [8] bereit und führen dann den Beweis des Existenzsatzes durch, indem wir die Beweisskizze aus [6] vervollständigen.

1 Voraussetzungen aus Darstellungstheorie und Kategorientheorie

In dieser Arbeit sei k stets ein unendlicher Körper. Unter einer Algebra verstehen wir eine assoziative k-Algebra mit Eins, unter einem Modul über einer Algebra stets einen Linksmodul. Tensorprodukte werden in dieser Arbeit immer über k gebildet. Ist $\mathfrak{A}$ eine Kategorie, so schreiben wir $A \in \mathfrak{A}$, wenn A ein Objekt von $\mathfrak{A}$ ist.

Bezeichnungen. Seien R ein Ring und Λ eine endlichdimensionale Algebra.

- Wir bezeichnen die Kategorie der R-Moduln und R-linearen Abbildungen mit $\operatorname{Mod} R$ und mit $\operatorname{mod} R$ die volle Unterkategorie der endlich erzeugten R-Moduln.

- Sind M, N R-Moduln, so bezeichnen wir mit $\operatorname{Hom}_R(M, N)$ die Menge der Morphismen $M \to N$.

- Für Elemente $v_1, \dots, v_n$ eines Vektorraums über k bezeichnen wir mit $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ das Vektorraumerzeugnis von $\{v_1, \dots, v_n\}$.

- Ist x ein Element von R, so schreiben wir (x) für das von x erzeugte Linksideal von R.

- Sei $M \in \operatorname{mod} \Lambda$. Wir bezeichnen mit $\operatorname{Rad}(M)$ das **Radikal** von M, d.h. den Schnitt aller maximalen Untermoduln von M. Bekanntlich ist dann $\operatorname{Rad}(\Lambda)$ das Jacobson-Radikal von Λ und es gilt $\operatorname{Rad}(M) = \operatorname{Rad}(\Lambda)M$. Es sei $\operatorname{Top}(M) = M/\operatorname{Rad}(M)$ der **Kopf** von M. Dann ist $\operatorname{Top}(M)$ der größte halbeinfache Faktormodul von M.

- Für $M \in \operatorname{mod} \Lambda$ bezeichnen wir mit $\operatorname{Soc}(M)$ den **Sockel** von M, also die Summe aller einfachen Untermoduln von M.

- Mit Λ^{op} bezeichnen wir die **Opposite-Algebra** zu Λ, also die Algebra mit Multiplikation $*$, die man aus Λ erhält, indem man $a * b = ba$ für alle $a, b \in \Lambda$ definiert.

- Sind $M, N \in \operatorname{Mod} R$ und $f : M \to N$ ein Morphismus, so heißt f **zerfallender Epimorphismus**, falls ein Morphismus $g : N \to M$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$ existiert, und **zerfallender Monomorphismus**, wenn ein Morphismus $h : N \to M$ mit $h \circ f = \mathrm{id}_M$ existiert.

- Es bezeichne $D = \operatorname{Hom}_k(-, k)$ die Standarddualität $\operatorname{mod} \Lambda \to \operatorname{mod} \Lambda^{op}$.

1.1 Abelsche Kategorien

In diesem Abschnitt stellen wir einige Grundbegriffe über abelsche Kategorien und homologische Algebra zusammen. Details finden sich in [15] und im Anhang von [2].

Definition 1.1.1. *Seien $\mathfrak{A}$ eine Kategorie und $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{A}$. Ein Objekt C von $\mathfrak{A}$ heißt **direkte Summe von** $X_1, \ldots, X_n$, wenn für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ Morphismen $i_j : X_j \to C$ existieren, die folgende universelle Eigenschaft erfüllen: Für jedes Objekt $Z \in \mathfrak{A}$ zusammen mit Morphismen $f_j : X_j \to Z$ existiert ein eindeutiger Morphismus $f : C \to Z$ mit $f_j = f \circ i_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Wenn die direkte Summe C von $X_1, \ldots, X_n$ existiert, so ist sie bis auf kanonische Isomorphie eindeutig und wir schreiben $C = \bigoplus_{j=1}^n X_j$.*

Definition 1.1.2. *Eine Kategorie $\mathfrak{A}$ heißt **additiv**, wenn $\mathfrak{A}$ folgende Eigenschaften hat:*

(1) Zu jeder endlichen Menge $X_1, \ldots, X_n$ von Objekten von $\mathfrak{A}$ existiert die direkte Summe $\bigoplus_{j=1}^n X_j$.

(2) Sind X, Y Objekte von $\mathfrak{A}$, so ist $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(X, Y)$ eine abelsche Gruppe und die Komposition von Morphismen ist bilinear.

(3) Es gibt ein Objekt $(0) \in \mathfrak{A}$, so dass $1_{(0)}$ das Nullelement der abelschen Gruppe $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}((0), (0))$ ist.

Unter bestimmten Umständen kann man aus einer additiven Kategorie eine neue Kategorie konstruieren, die das kategorielle Analog zu einem Faktorring ist.

Definition 1.1.3. *Seien $\mathfrak{A}$ eine additive Kategorie und I eine Klasse von Morphismen in $\mathfrak{A}$. Für alle $M, N \in \mathfrak{A}$ sei $\mathrm{Hom}_I(M, N)$ die Menge der Morphismen in I, die in $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(M, N)$ liegen. Die Klasse I heißt **Ideal von** $\mathfrak{A}$, wenn folgende Aussagen für alle Objekte $M, N \in \mathfrak{A}$ gelten:*

(1) Die Menge $\mathrm{Hom}_I(M, N)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(M, N)$.

(2) Für jedes Objekt $Z \in \mathfrak{A}$ und alle Morphismen $f : Z \to M$ und $g : N \to Z$ gilt, dass $\mathrm{Hom}_I(M, N) \circ f \subseteq \mathrm{Hom}_I(Z, N)$ und $g \circ \mathrm{Hom}_I(M, N) \subseteq \mathrm{Hom}_I(M, Z)$.

Ist I ein Ideal von $\mathfrak{A}$, so können wir eine neue Kategorie $\mathfrak{A}/I$ durch folgende Daten definieren:

- *Die Objekte von $\mathfrak{A}/I$ sind die Objekte von $\mathfrak{A}$.*
- *Sind M, N Objekte von I, so ist die Menge der Morphismen $M \to N$ definiert durch $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}/I}(M, N) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(M, N)/\mathrm{Hom}_I(M, N)$.*
- *Die Komposition von Morphismen wird definiert durch $(f + \mathrm{Hom}_I(M, N)) \circ (g + \mathrm{Hom}_I(Z, M)) = f \circ g + \mathrm{Hom}_I(Z, N)$.*

*Die Kategorie $\mathfrak{A}/I$ heißt **Quotientenkategorie von $\mathfrak{A}$ nach** I.*

Sei Λ eine endlichdimensionale k-Algebra. Beispiele für ein Ideal von $\operatorname{mod}\Lambda$ sind die Klassen aller Morphismen, die durch einen injektiven bzw. einen projektiven Modul faktorisieren. Die entsprechende Quotientenkategorie heißt injektiv stabile bzw. projektiv stabile Kategorie.

Definition 1.1.4. *Seien $\mathfrak{A}$ eine additive Kategorie und $f : X \to Y$ ein Morphismus in $\mathfrak{A}$.*

(1) Ein Objekt $K \in \mathfrak{A}$ zusammen mit einem Morphismus $i : K \to X$ heißt ***Kern von*** *f, wenn $f \circ i = 0$ gilt und i folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Für jeden Morphismus $h : Z \to X$ mit $f \circ h = 0$ existiert genau ein Morphismus $h' : Z \to K$ mit $h = i \circ h'$. Existiert der Kern K eines Morphismus f, so ist er bis auf kanonische Isomorphie eindeutig und wir schreiben $K = \ker(f)$.*

(2) Ein Objekt $C \in \mathfrak{A}$ zusammen mit einem Morphismus $p : Y \to C$ heißt ***Kokern von*** *f, wenn $p \circ f = 0$ gilt und p die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Für jeden Morphismus $h : Y \to Z$ mit $h \circ f = 0$ existiert genau ein Morphismus $h' : C \to Z$ mit $h = h' \circ p$. Existiert der Kokern C eines Morphismus f, so ist er bis auf kanonische Isomorphie eindeutig und wir schreiben $C = \operatorname{coker}(f)$.*

(3) Hat jeder Morphismus in $\mathfrak{A}$ einen Kern und einen Kokern und sind $p : \operatorname{coker}(f) \to Y$ sowie $i : \ker(f) \to X$ die zugehörigen Morphismen, so definieren wir $\operatorname{im}(f) = \ker(p)$ und $\operatorname{coim}(f) = \operatorname{coker}(i)$. Wir nennen $\operatorname{im}(f)$ das ***Bild von*** *f und $\operatorname{coim}(f)$ das* ***Kobild von*** *f.*

In einer additiven Kategorie $\mathfrak{A}$, in der jeder Morphismus einen Kern und einen Kokern hat, gibt es aufgrund der universellen Eigenschaften für jeden Morphismus $f : X \to Y$ einen eindeutigen Morphismus $f' : \operatorname{coim}(f) \to \operatorname{im}(f)$ mit $f = i \circ f' \circ p$, wobei $i : \operatorname{im}(f) \to Y$ und $p : X \to \operatorname{coim}(f)$ die kanonischen Morphismen sind.

Ist R ein Ring, so entsprechen Kerne, Kokerne, Bilder und direkte Summen in $\operatorname{Mod} R$ den üblichen Mengen zusammen mit den zugehörigen kanonischen Abbildungen und für jeden Morphismus $f : M \to N$ ist der oben beschriebene Morphismus f' der kanonische Isomorphismus $M/\ker(f) \to \operatorname{im}(f)$. Die Kategorie $\operatorname{Mod} R$ ist abelsch im Sinne der folgenden Definition:

Definition 1.1.5. *Eine additive Kategorie $\mathfrak{A}$ heißt* ***abelsch****, wenn gilt:*

(1) Jeder Morphismus in $\mathfrak{A}$ hat einen Kern und einen Kokern.

(2) Ist f ein Morphismus in $\mathfrak{A}$, so ist der kanonische Morphismus $\operatorname{coim}(f) \to \operatorname{im}(f)$ ein Isomorphismus.

Bemerkung 1.1.6. *Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ abelsche Kategorien und $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ eine Äquivalenz von Kategorien oder eine Dualität. Dann ist F exakt.*

Man definiert exakte Folgen, zerfallende Folgen, projektive und injektive Objekte sowie projektive Decken und injektive Hüllen in abelschen Kategorien genauso wie in Modulkategorien (vgl. [15]). Es gibt allerdings in abelschen Kategorien nicht immer injektive Objekte und projektive Objekte: So hat etwa die Kategorie der endlichen abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen überhaupt keine nichttrivialen projektiven Objekte.

Definition 1.1.7. *Sei $\mathfrak{A}$ eine abelsche Kategorie.*

*(1) Die Kategorie $\mathfrak{A}$ **hat genug Projektive**, wenn zu jedem $X \in \mathfrak{A}$ ein projektives Objekt $P \in \mathfrak{A}$ zusammen mit einem Epimorphismus $P \to X$ existiert. Sie **hat projektive Decken**, wenn jedes Objekt von $\mathfrak{A}$ eine projektive Decke in $\mathfrak{A}$ hat.*

*(2) Die Kategorie $\mathfrak{A}$ **hat genug Injektive**, wenn zu jedem $X \in \mathfrak{A}$ ein injektives Objekt $I \in \mathfrak{A}$ zusammen mit einem Monomorphismus $X \to I$ existiert. Sie **hat injektive Hüllen**, wenn jedes Objekt in $\mathfrak{A}$ eine injektive Hülle in $\mathfrak{A}$ hat.*

Definition 1.1.8. *Seien $\mathfrak{A}$ eine abelsche Kategorie und $X \in \mathfrak{A}$.*

*(1) Eine **projektive Auflösung von** X ist eine exakte Folge*

$$\ldots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} X \longrightarrow (0),$$

wobei $P_i \in \mathfrak{A}$ projektiv für alle $i \in \mathbb{N}_0$ ist.

*(2) Eine **injektive Auflösung von** X ist eine exakte Folge*

$$(0) \longrightarrow X \xrightarrow{d_0} I_0 \xrightarrow{d_1} \ldots \xrightarrow{d_{n-1}} I_{n-1} \xrightarrow{d_n} I_n \longrightarrow \ldots,$$

wobei $I_i \in \mathfrak{A}$ injektiv für alle $i \in \mathbb{N}_0$ ist.

(3) Eine kurze exakte Folge

$$P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} X \longrightarrow (0),$$

*so dass P_0, P_1 projektiv sowie $d_1 : P_1 \to \ker(d_0)$ und $d_0 : P_0 \to X$ projektive Decken sind, heißt **minimale projektive Präsentierung von X**.*

(4) Eine kurze exakte Folge

$$(0) \longrightarrow X \xrightarrow{d_0} I_0 \xrightarrow{d_1} I_1,$$

*so dass I_0, I_1 injektiv sowie $d_0 : X \to I_0$ und $\operatorname{im}(d_1) \to I_1$ injektive Hüllen sind, heißt **minimale injektive Kopräsentierung von X**.*

Wie bei Modulkategorien kann man in abelschen Kategorien, die genug Injektive bzw. genug Projektive haben, links- bzw. rechtsabgeleitete Funktoren definieren. Wir brauchen in dieser Arbeit nur Ext-Funktoren.

Definition 1.1.9. *Seien $\mathfrak{A}$ eine abelsche Kategorie, die genug Projektive hat, und $N \in \mathfrak{A}$. Für jedes $M \in \mathfrak{A}$ wählen wir eine projektive Auflösung*

$$\dots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} X \longrightarrow (0).$$

Durch Weglassen von X und Anwenden des kontravarianten Funktors $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(-,N)$ erhalten wir eine nicht notwendig exakte Folge abelscher Gruppen

$$\begin{aligned}(0) \longrightarrow \quad & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(P_0,N) \xrightarrow{d_1^*} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(P_1,N) \xrightarrow{d_2^*} \dots \\ \longrightarrow \ & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(P_{n-1},N) \xrightarrow{d_n^*} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(P_n,N) \longrightarrow \dots\end{aligned}$$

mit $d_{i+1}^* \circ d_i^* = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und definieren

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{A}}(M,N) = \ker(d_{i+1}^*)/\mathrm{im}\,(d_i^*),$$

wobei wir jeweils $d_0^* = 0$ setzen.

Die für uns wichtigen Eigenschaften von Ext stellen wir im folgenden Satz zusammen.

Satz 1.1.10. *Seien $\mathfrak{A}$ eine abelsche Kategorie mit genug Projektiven und $M, N \in \mathfrak{A}$.*

(1) Die Definition von $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{A}}(M,N)$ ist unabhängig von der Wahl der projektiven Auflösung von M.

(2) Es gilt $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{A}}(M,N) = (0)$ genau dann, wenn jede kurze exakte Folge

$$(0) \longrightarrow N \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow (0)$$

zerfällt.

Eine Kategorie heißt **klein**, wenn ihre Objekte eine Menge bilden. Der folgende Satz zeigt, dass sich kleine abelsche Kategorien wie Modulkategorien verhalten.

Satz 1.1.11. *(Einbettungssatz von Freyd und Mitchell) Sei $\mathfrak{A}$ eine kleine abelsche Kategorie. Dann existieren ein Ring R und ein volltreuer, exakter Funktor $F : \mathfrak{A} \to \mathrm{Mod}\,R$.*

Der Satz von Freyd-Mitchell kann benutzt werden, um Aussagen über kommutative Diagramme, die sich für R-Moduln durch „Diagrammjagd" beweisen lassen, auf beliebige abelsche Kategorien zu verallgemeinern. Für den vollständigen Beweis siehe [7]. Eine Beweisskizze in moderner Terminologie findet man in [15]. Als Beispiel für die Anwendung von 1.1.11 verallgemeinern wir das bekannte 5-Lemma von Modulkategorien auf beliebige abelsche Kategorien.

Lemma 1.1.12. *(5-Lemma in beliebigen abelschen Kategorien) Seien $\mathfrak{A}$ eine abelsche Kategorie und*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \big\downarrow{\scriptstyle a} & & \big\downarrow{\scriptstyle b} & & \big\downarrow{\scriptstyle c} & & \big\downarrow{\scriptstyle d} & & \big\downarrow{\scriptstyle e} \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen in $\mathfrak{A}$. Sind dann a, b, d, e Isomorphismen, so ist auch c ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $A_0 = \{A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'\}$. Für alle $i \in \mathbb{N}$ sei

$$A_i = \bigcup_{X,Y \in A_{i-1}} \left(\{X \oplus Y\} \cup \bigcup_{f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{A}}(X,Y)} \{\ker(f), \operatorname{coker}(f)\} \right)$$

und es sei $\mathfrak{A}'$ die volle Unterkategorie von $\mathfrak{A}$ mit Objekten $\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} A_i$. Nach Konstruktion ist $\mathfrak{A}'$ eine kleine abelsche Kategorie, also existieren nach 1.1.11 ein Ring R und ein volltreuer, exakter Funktor $F : \mathfrak{A}' \to \operatorname{Mod} R$. Da F exakt ist, ist

$$\begin{array}{ccccccccc} F(A) & \longrightarrow & F(B) & \longrightarrow & F(C) & \longrightarrow & F(D) & \longrightarrow & F(E) \\ \big\downarrow{\scriptstyle F(a)} & & \big\downarrow{\scriptstyle F(b)} & & \big\downarrow{\scriptstyle F(c)} & & \big\downarrow{\scriptstyle F(d)} & & \big\downarrow{\scriptstyle F(e)} \\ F(A') & \longrightarrow & F(B') & \longrightarrow & F(C') & \longrightarrow & F(D') & \longrightarrow & F(E') \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen in $\operatorname{Mod} R$ mit Isomorphismen $F(a), F(b), F(d), F(e)$. Nach dem 5-Lemma für $\operatorname{Mod} R$ ist $F(c)$ ein Isomorphismus. Da F voll ist, existiert ein Morphismus $c' \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{A}}(C', C)$ mit $F(c') = F(c)^{-1}$. Dann gilt $F(c \circ c') = F(c) \circ F(c') = \mathrm{id}_{F(C')} = F(\mathrm{id}_{C'})$ und $F(c' \circ c) = F(c') \circ F(c) = \mathrm{id}_{F(C)} = F(\mathrm{id}_C)$. Es folgt $c \circ c' = \mathrm{id}_{C'}$ und $c' \circ c = \mathrm{id}_C$, weil F treu ist. Also ist c ein Isomorphismus in $\mathfrak{A}$. □

Bei ähnlichen Anwendungen von 1.1.11 werden wir in Zukunft auf die explizite Konstruktion einer kleinen, abelschen Kategorie, die die Objekte und Morphismen eines kommutativen Diagramms enthält, verzichten, da dies ähnlich wie im Beweis von 1.1.12 funktioniert. Stattdessen werden wir in solchen Situationen zur Vereinfachung der Notation annehmen, dass das entsprechende Diagramm in einer vollen Unterkategorie von $\operatorname{Mod} R$ für einen Ring R liegt.

1.2 Fast zerfallende Folgen

In diesem Abschnitt stellen wir Grundbegriffe über fast zerfallende Folgen bereit. Im gesamten Abschnitt sei Λ eine endlichdimensionale k-Algebra und $\mathfrak{A}$ eine abelsche Kategorie. Motivation für die hier gegebenen Begriffe sowie Beweise und Anwendungen für die dargestellten Sätze findet man etwa in [2] und [3].

Definition 1.2.1. *Seien $M, N \in \mathfrak{A}$.*

(1) Ein Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(M,N)$ heißt ***rechts fast zerfallend****, wenn f kein zerfallender Epimorphismus ist und wenn für jeden Morphismus $g : M' \to N$, der kein zerfallender Epimorphismus ist, ein Morphismus $h : M' \to M$ mit $g = f \circ h$ existiert.*

(2) Ein Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(M,N)$ heißt ***links fast zerfallend****, wenn f kein zerfallender Monomorphismus ist und wenn für jeden Morphismus $g : M \to M'$, der kein zerfallender Monomorphismus ist, ein Morphismus $h : N \to M'$ mit $g = h \circ f$ existiert.*

(3) Eine exakte Folge

$$(0) \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow (0)$$

in $\mathfrak{A}$ heißt ***fast zerfallend****, wenn f links fast zerfallend und g rechts fast zerfallend ist.*

Definition 1.2.2. *Wir sagen, dass $\mathfrak{A}$* ***fast zerfallende Folgen hat****, wenn folgende Aussagen gelten:*

(1) Für jedes $N \in \mathfrak{A}$, so dass N unzerlegbar und nicht injektiv ist, existiert eine fast zerfallende Folge $(0) \to N \to E \to M \to (0)$ in $\mathfrak{A}$.

(2) Für jedes $M \in \mathfrak{A}$, so dass M unzerlegbar und nicht projektiv ist, existiert eine fast zerfallende Folge $(0) \to N \to E \to M \to (0)$ in $\mathfrak{A}$.

Im Folgenden stellen wir einige Sätze über fast zerfallende Folgen in $\mathrm{mod}\,\Lambda$ zusammen und definieren die Transponierte eines Λ-Moduls.

Satz 1.2.3. *Die Kategorie $\mathrm{mod}\,\Lambda$ hat fast zerfallende Folgen.*

Definition 1.2.4. *Sei $M \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ und*

$$P_1 \xrightarrow{f} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow (0)$$

eine minimale projektive Präsentierung von M. Dann erhalten wir eine exakte Folge

$$\begin{aligned}(0) \quad &\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(M,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(P_0,\Lambda) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(P_1,\Lambda) \longrightarrow \\ \mathrm{coker}\,(f^*) &\longrightarrow \quad (0)\end{aligned}$$

von Λ^{op}-Moduln. Wir definieren $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{coker}\,(f^*)$ und nennen $\mathrm{Tr}(M)$ die ***Transponierte von*** *M.*

Proposition 1.2.5. *Sei $(0) \to N \to E \to M \to (0)$ eine fast zerfallende Folge in $\mathrm{mod}\,\Lambda$. Dann gilt $N \cong D\mathrm{Tr}(M)$ und $M \cong \mathrm{Tr}D(N)$.*

Proposition 1.2.6. *[3]*
Seien $X \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ nicht injektiv und $(0) \to X \to I_0 \to I_1$ eine minimale injektive Kopräsentierung von X. Dann gilt $\mathrm{Top}(\mathrm{Tr}D(X)) \cong \mathrm{Soc}(I_1)$.

1.3 Hopf-Algebren und Komoduln

In diesem Abschnitt stellen wir einige Grundbegriffe über Hopf-Algebren und affine Gruppenschemata zur Verfügung, die wir später benötigen. Für die Beweise der hier dargestellten Resultate verweisen wir auf [1], [14] und [12].

Ist A eine Hopf-Algebra, so bezeichnen wir stets mit $\Delta : A \to A \otimes A$ die Komultiplikation, mit $S : A \to A$ die Antipode und mit $\epsilon : A \to k$ die Koinverse von A. Die einzigen Hopf-Algebren, die in dieser Arbeit eine Rolle spielen, sind die Gruppenalgebren kG für Gruppen G. In diesem Fall sind Δ, S und ϵ definiert durch $\Delta(g) = g \otimes g$, $S(g) = g^{-1}$ und $\epsilon(g) = 1$ für alle $g \in G$. Wir stellen einige weitere Begriffe zusammen, die wir später benötigen werden.

Definition 1.3.1. *Sei A eine Hopf-Algebra.*

*(1) Ein k-Vektorraum V heißt A-**Komodul**, wenn eine k-lineare Abbildung $\rho : V \to V \otimes A$ existiert, so dass die Diagramme*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"] & V \otimes A \arrow[d, "\mathrm{id}_V \otimes \Delta"] \\ V \otimes A \arrow[r, "\rho \otimes \mathrm{id}_A"] & V \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\sim"] & V \otimes A \arrow[d, "\mathrm{id}_V \otimes \epsilon"] \\ & V \otimes k \end{tikzcd}$$

*kommutieren. Sind V, W A-Komoduln vermöge $\rho_V : V \to V \otimes A$ und $\rho_W : W \to W \otimes A$, so heißt eine k-lineare Abbildung $f : V \to W$ ein **Morphismus von Komoduln**, wenn das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho_V"] \arrow[d, "f"] & V \otimes A \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}_A"] \\ W \arrow[r, "\rho_W"] & W \otimes A \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Die Kategorie der A-Komoduln und Komodulmorphismen bezeichnen wir mit $\mathrm{Comod}\, A$.

*(2) Ein k-Vektorraum V heißt A-**Komodul-Algebra**, wenn A eine k-Algebra und ein A-Komodul ist, so dass die Komodulabbildung $\rho : V \to V \otimes A$ ein Algebrenhomomorphismus ist.*

Bemerkung 1.3.2. *Ist A eine Hopf-Algebra, so ist* $\mathrm{Comod}\, A$ *eine abelsche Kategorie. Direkte Summen, Kerne und Kokerne entsprechen dabei genau den direkten Summen, Kernen und Kokernen der unterliegenden k-Vektorräume und linearen Abbildungen.*

Bekanntlich entsprechen kommutative Hopf-Algebren über die Korrespondenz $A \mapsto \mathrm{Hom}_{k-alg}(A, -)$ genau den affinen Gruppenschemata und Aussagen über Gruppenschemata lassen sich in Aussagen über die zugehörigen Hopf-Algebren übersetzen. Eine lineare Darstellung eines affinen Gruppenschemas $\mathcal{G}$ ist ein k-Vektorraum V zusammen mit einem Morphismus von Gruppenschemata $\mathcal{G} \to \mathrm{Aut}_V$, wobei Aut_V der durch $\mathrm{Aut}_V(R) = \mathrm{Aut}_R(V \otimes R)$ für jede kommutative k-Algebra R definierte Funktor ist.

Satz 1.3.3. *Sei $\mathcal{G}$ ein von der Hopf-Algebra A dargestelltes affines Gruppenschema und V ein k-Vektorraum. Dann entsprechen die linearen Darstellungen $\Phi : \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}_V$ genau den A-Komodulstrukturen auf V. Definiert $\rho : V \to V \otimes A$ eine solche Komodulstruktur und ist $\Phi : \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}_V$ die zugehörige lineare Darstellung, so operiert $g \in \mathcal{G}(R)$ auf $V \otimes 1 \subseteq V \otimes R$ durch $\Phi_R(g)|_{V\otimes 1} = (\mathrm{id}_V \otimes g) \circ \rho \circ \psi$ für jede kommutative k-Algebra R, wobei $\psi : V \otimes k \to V$ der kanonische Isomorphismus ist.*

Für eine algebraische Gruppe G sei jeweils $k[G]$ der Koordinatenring von G. Die rationalen Darstellungen von G entsprechen dann genau den $k[G]$-Komoduln und die G-äquivarianten Abbildungen zwischen rationalen G-Moduln entsprechen genau den $k[G]$-Komodulmorphismen. Ist $\mathcal{G}$ ein affines Gruppenschema, so dass die zugehörige Hopf-Algebra endlich erzeugt ist, so ist $\mathcal{G}(k)$ eine algebraische Gruppe mit Koordinatenring $k[\mathcal{G}(k)]$.

Satz 1.3.4. *Seien $\mathcal{G}$ ein affines Gruppenschema, so dass die darstellende Hopf-Algebra A endlich erzeugt ist. Es gelte $k[\mathcal{G}(k)] \cong A$. Dann entsprechen die linearen Darstellungen von $\mathcal{G}$ genau den rationalen Darstellungen von $\mathcal{G}(k)$ vermöge $\Phi \mapsto \Phi_k$ und der Identifikation $V \cong V \otimes k$. Die Morphismen der zugehörigen Komoduln entsprechen dabei genau den $\mathcal{G}(k)$-äquivarianten Abbildungen zwischen den entsprechenden rationalen $\mathcal{G}(k)$-Moduln.*

Ist k algebraisch abgeschlossen, so ist die Bedingung $k[\mathcal{G}(k)] \cong A$ aus 1.3.4 genau dann erfüllt, wenn A reduziert ist.

2 Graduierte Algebren

In diesem Kapitel führen wir in die Theorie der graduierten Algebren ein und beweisen einige grundlegende Sätze. Unser Hauptinteresse gilt dabei $\mathbb{Z}^n$-graduierten Algebren. Im ersten Abschnitt nehmen wir einen allgemeineren Standpunkt ein, während wir im zweiten Abschnitt dem Zugang in [6] folgen und uns auf $\mathbb{Z}^n$-graduierte Algebren und Moduln beschränken.

2.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften

Im Folgenden sei G eine Gruppe.

Definition 2.1.1. *Sei Λ eine k-Algebra.*

*(1) Die Algebra Λ heißt G-**graduiert**, wenn eine Zerlegung $\Lambda = \bigoplus_{g \in G} \Lambda_g$ existiert, so dass die Λ_g k-Vektorräume mit $\Lambda_g \Lambda_h \subseteq \Lambda_{gh}$ für alle $g, h \in G$ sind. Die Elemente von $\bigcup_{g \in G} \Lambda_g$ heißen **homogen**.*

*(2) Sei Λ G-graduiert. Ein Λ-Modul M heißt G-**graduiert**, wenn eine Zerlegung $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ in k-Vektorräume M_g existiert, so dass $\Lambda_g M_h \subseteq M_{gh}$ für alle $g, h \in G$ gilt. Wir nennen $\operatorname{supp}(M) = \{g \in G | M_g \neq (0)\}$ den **Träger von** M. Ist $m = \sum_{g \in G} m_g \in M$ mit $m_g \in M_g$, so heißen die m_g **homogene Komponenten von** m.*

*(3) Eine Λ-lineare Abbildung $f : M \to N$ zwischen graduierten Λ-Moduln M und N heißt **graduierter Morphismus**, wenn $f(M_g) \subseteq N_g$ für alle $g \in G$. Wir bezeichnen den Vektorraum aller graduierten Morphismen $M \to N$ mit $\operatorname{Hom}_{\operatorname{gr}\Lambda}(M, N)$, die Kategorie der graduierten Moduln und Morphismen mit $\operatorname{Mod}\operatorname{gr}\Lambda$ und die volle Unterkategorie der endlich erzeugten graduierten Moduln mit $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$.*

*(4) Ist $M = \bigoplus_{g \in G} M_g \in \operatorname{Mod}\operatorname{gr}\Lambda$, so heißt ein Untermodul $N \subseteq M$ **homogen**, wenn $N = \bigoplus_{g \in G}(N \cap M_g)$. Dies definiert eine Graduierung auf N.*

Bemerkung 2.1.2. *Seien Λ eine G-graduierte Algebra und $M \in \operatorname{Mod}\operatorname{gr}\Lambda$.*

(1) Ist N ein Untermodul von M, so ist N genau dann homogen, wenn die homogenen Komponenten aller Elemente von N ebenfalls in N liegen.

(2) Ist Λ endlichdimensional und $M \in \operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$, so ist $\operatorname{supp}(M)$ endlich.

Wir definieren nun einige wichtige Funktoren auf $\operatorname{Mod}\operatorname{gr}\Lambda$ und $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$.

Definition 2.1.3. *Sei Λ eine G-graduierte Algebra.*

(1) Den Vergissfunktor $\operatorname{Mod}\operatorname{gr}\Lambda \to \operatorname{Mod}\Lambda$*, d.h. den Funktor, der jedem graduierten* Λ*-Modul den unterliegenden* Λ*-Modul ohne Graduierung und jedem graduierten Morphismus die unterliegende* Λ*-lineare Abbildung zuordnet, bezeichnen wir mit* $\mathfrak{F}$*.*

(2) Sei $g \in G$*. Wir definieren den* ***g-ten Shift-Funktor*** $[g] : \operatorname{Mod}\operatorname{gr}\Lambda \to \operatorname{Mod}\operatorname{gr}\Lambda$*, indem wir jedem* $M \in \operatorname{Mod}\operatorname{gr}\Lambda$ *das Objekt* $M[g]$ *mit* $M[g]_h = M_{hg^{-1}}$ *für alle* $h \in G$ *zuordnen und Morphismen unverändert lassen. Dann gilt* $\mathfrak{F} \circ [g] = \mathfrak{F}$*.*

Die Funktoren schränken sich zu Funktoren $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda \to \operatorname{mod}\Lambda$ *und* $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda \to \operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ *ein, die wir ebenfalls mit* $\mathfrak{F}$ *und* $[g]$ *bezeichnen. Die volle Unterkategorie der Objekte der Form* $\mathfrak{F}(M)$*,* $M \in \operatorname{Mod}\operatorname{gr}\Lambda$ *(bzw.* $M \in \operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$*) bezeichnen wir mit* $\mathfrak{F}(\operatorname{Mod}\operatorname{gr}\Lambda)$ *(bzw.* $\mathfrak{F}(\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda)$*). Die Objekte dieser Kategorien nennen wir* ***graduierbar****.*

Es gelten die üblichen Homomorphiesätze.

Bemerkung 2.1.4. *Sei* Λ *eine* G*-graduierte Algebra. Ist* $I \subseteq \Lambda$ *ein homogenes Ideal, so hat* Λ/I *eine kanonische Struktur als graduierte* k*-Algebra. Ist* $M \in \operatorname{Mod}\operatorname{gr}\Lambda$ *und* N *ein homogener Untermodul von* M*, so erhält* M/N *auf kanonische Weise die Struktur eines graduierten* Λ*-Moduls.*

Im Folgenden geben wir einige Beispiele.

Beispiel.

(1) Definieren wir $(kG)_g = \langle g \rangle$ für alle $g \in G$, so erhält die Gruppenalgebra kG die Struktur einer G-graduierten Algebra. In kG gibt es keine homogenen Ideale außer (0) und kG, da homogene Elemente von kG stets Einheiten sind.

(2) Sei $\Lambda = k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynomring in n Variablen. Für $i \in \mathbb{N}_0^n$ sei $X^i = X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$. Dann ist $\Lambda = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0^n} \langle X^i \rangle$ eine $\mathbb{Z}^n$-graduierte Algebra, wenn wir $\Lambda_i = (0)$ für $i \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}_0^n$ setzen. Ist $i \in \mathbb{N}_0^n$, so ist das von X^i erzeugte Hauptideal (X^i) homogen, also ist nach 2.1.4 auch $\Lambda/(X^i)$ eine $\mathbb{Z}^n$-graduierte Algebra. Indem man Summen von Idealen dieses Typs bildet und die entsprechenden Faktoralgebren betrachtet, erhält man auch Beispiele für endlichdimensionale $\mathbb{Z}^n$-graduierte Algebren.

(3) Seien Q ein endlicher Köcher ohne gerichtete Kreise und kQ die zugehörige Wegealgebra. Dann gilt $kQ = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} kQ_i$, wobei kQ_i jeweils den Aufspann der Pfade der Länge i in Q bezeichne. Es gilt $kQ_i kQ_j \subseteq kQ_{i+j}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$, also ist kQ eine $\mathbb{Z}$-graduierte Algebra, wenn wir $kQ_i = (0)$ für $i \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$ setzen. Da jede endlichdimensionale erbliche Algebra isomorph zur Wegealgebra eines solchen Köchers ist, sind damit erbliche Algebren stets $\mathbb{Z}$-graduierbar. Die projektiv unzerlegbaren Moduln von kQ entsprechen bekanntlich eindeutig den Punkten von Q: Ist e so ein Punkt, so ist $e \in kQ$ primitives Idempotent und der zugehörige projektiv unzerlegbare Modul kQe hat als Basis alle Wege mit Anfangspunkt e, ist also graduierbar. Damit sind alle projektiven Moduln in $\operatorname{mod} kQ$ graduierbar. Da kQ erblich ist, sind

insbesondere alle Untermoduln von kQ graduierbar. Dies bedeutet aber nicht, dass alle Untermoduln von kQ homogen sind: Sei etwa Q der Köcher

$$\begin{tikzcd} \overset{e_1}{\cdot} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \overset{e_2}{\cdot} \arrow[d, "\beta"] \\ & \overset{e_3}{\cdot} \end{tikzcd}$$

und I das von $\beta\alpha - \gamma$ erzeugte Linksideal von kQ. Eine kurze Rechnung zeigt $I = \langle \beta\alpha - \gamma \rangle$ (wobei wir der Definition der Multiplikation aus [3] folgen), also ist I nicht homogen, da $\beta\alpha, \gamma \notin I$. Durch $\beta\alpha - \gamma \mapsto e_3$ wird ein Isomorphismus $I \to kQe_3 = \langle e_3 \rangle$ induziert, der ein graduierter Morphismus ist, wenn wir I durch $I = I_0$ graduieren.

Lemma 2.1.5. *Sei Λ eine G-graduierte Algebra. Dann gilt $1 \in \Lambda_1$. Insbesondere ist Λ_1 eine Unteralgebra von Λ.*

Beweis. Sei $1 = \sum_{g \in G} x_g$ eine Zerlegung in homogene Komponenten. Sei $h \in G$. Dann gilt $x_h = \sum_{g \in G} x_h x_g$. Wegen $x_h x_g \in \Lambda_{hg}$ folgt $x_h x_g = 0$ für alle $g \in G \setminus \{1\}$ und $x_h x_1 = x_h$. Damit folgt $x_1 = 1x_1 = \sum_{g \in G} x_g x_1 = 1$. □

In der folgenden Proposition stellen wir einen Zusammenhang zwischen G-graduierten Algebren und Komoduln über der Gruppenalgebra kG her. Dies ermöglicht uns, elementare Aussagen über graduierte Algebren oft ohne Rechnung zu beweisen.

Proposition 2.1.6. *Sei kG die Gruppenalgebra von G. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) Eine Algebra Λ ist genau dann G-graduiert, wenn Λ eine kG-Komodul-Algebra ist. Dabei entsprechen homogene Unteralgebren genau den Unteralgebren, die gleichzeitig Unterkomoduln sind.

(2) Sind Λ eine G-graduierte Algebra und M ein Λ-Modul, so ist M genau dann G-graduiert, wenn M ein kG-Komodul ist, so dass für alle $\lambda \in \Lambda$, $m \in M$

$$\rho_M(\lambda.m) = \rho_\Lambda(\lambda).\rho_M(m) \tag{2.1}$$

gilt, wobei ρ_Λ, ρ_M die jeweiligen Komodulstrukturen auf Λ und M definieren. Homogene Untermoduln entsprechen hierbei genau den Unterkomoduln. Sind M, N zwei G-graduierte Λ-Moduln, so sind die graduierten Morphismen $M \to N$ genau die Λ-linearen Abbildungen, die zusätzlich Komodulmorphismen sind.

Beweis. (1) Sei zunächst $\Lambda = \bigoplus_{g \in G} \Lambda_g$ eine G-graduierte Algebra. Wir definieren eine k-lineare Abbildung $\rho : \Lambda \to \Lambda \otimes kG$ durch $\rho(\lambda_g) = \lambda_g \otimes g$ für alle $g \in G$, $\lambda_g \in \Lambda_g$. Dann gilt nach 2.1.5, dass $\rho(1) = 1 \otimes 1$. Für alle $g, h \in G$, $\lambda_g \in \Lambda_g$, $\lambda_h \in \Lambda_h$ gilt außerdem wegen $\lambda_g \lambda_h \in \Lambda_{gh}$, dass

$$\rho(\lambda_g \lambda_h) = \lambda_g \lambda_h \otimes gh = (\lambda_g \otimes g)(\lambda_h \otimes h) = \rho(\lambda_g)\rho(\lambda_h),$$

also ist ρ ein Algebrenhomomorphismus.

Für alle $g \in G$ und $\lambda_g \in \Lambda_g$ erhalten wir außerdem

$$(\mathrm{id}_\Lambda \otimes \Delta) \circ \rho(\lambda_g) = \lambda_g \otimes g \otimes g = (\rho \otimes \mathrm{id}_{kG}) \circ \rho(\lambda_g)$$

sowie

$$(\mathrm{id}_\Lambda \otimes \epsilon) \circ \rho(\lambda_g) = \lambda_g \otimes 1.$$

Damit ist Λ ein kG-Komodul. Insgesamt ist Λ eine kG-Komodul-Algebra.

Sei umgekehrt Λ eine kG-Komodul-Algebra vermöge $\rho : \Lambda \to \Lambda \otimes kG$. Für alle $g \in G$ sei

$$\Lambda_g = \{\lambda \in \Lambda | \rho(\lambda) = \lambda \otimes g\}.$$

Dann gilt für alle $g, h \in G$, $\lambda_g \in \Lambda_g$, $\lambda_h \in \Lambda_h$, dass

$$\rho(\lambda_g \lambda_h) = \rho(\lambda_g)\rho(\lambda_h) = (\lambda_g \lambda_h \otimes gh),$$

also $\lambda_g \lambda_h \in \Lambda_{gh}$.

Sei $\lambda \in \Lambda$. Da G eine Basis von kG ist, können wir $\rho(\lambda) = \sum_{g \in G} \lambda_g \otimes g$ für passende $\lambda_g \in \Lambda$ schreiben. Dann gilt

$$(\rho \otimes \mathrm{id}_{kG}) \circ \rho(\lambda) = \sum_{g \in G} \rho(\lambda_g) \otimes g$$

und

$$(\mathrm{id}_\Lambda \otimes \Delta) \circ \rho(\lambda) = \sum_{g \in G} \lambda_g \otimes g \otimes g,$$

also folgt $\sum_{g \in G} \rho(\lambda_g) \otimes g = \sum_{g \in G} \lambda_g \otimes g \otimes g$, da Λ ein Komodul ist. Durch Koeffizientenvergleich folgt $\rho(\lambda_g) = \lambda_g \otimes g$ und damit $\lambda_g \in \Lambda_g$, weil G eine Basis von kG ist. Außerdem gilt

$$\lambda \otimes 1 = (\mathrm{id}_\Lambda \otimes \epsilon) \circ \rho(\lambda) = \sum_{g \in G} \lambda_g \otimes 1 = (\sum_{g \in G} \lambda_g) \otimes 1,$$

also $\lambda = \sum_{g \in G} \lambda_g$. Wir erhalten $\Lambda = \bigoplus_{g \in G} \Lambda_g$, wobei klar ist, dass es sich um eine direkte Summe handelt. Die Algebra Λ ist somit G-graduiert. Die Aussage über homogene Unteralgebren folgt direkt aus den Konstruktionen der Komodulstruktur und der Graduierung.

(2) Sei M ein Λ-Modul. Wie in (1) zeigt man, dass M genau dann eine Zerlegung $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ hat, wenn M ein kG-Komodul ist. Sei M ein G-graduierter Modul und $\rho_M : M \to M \otimes kG$ die zugehörige Komodulstruktur. Für alle $g, h \in G$, $\lambda_g \in \Lambda_g$ und $m_h \in M_h$ gilt $\lambda_g.m_h \in M_{gh}$, also folgt mit dem Beweis von (1), dass

$$\rho_M(\lambda_g.m_h) = \lambda_g.m_h \otimes gh = (\lambda_g \otimes g).(m_h \otimes h) = \rho_\Lambda(\lambda_g).\rho_M(m_h).$$

Also erfüllt ρ_M die Gleichung 2.1.

Ist umgekehrt 2.1 erfüllt, so gilt für alle $g, h \in G$, $\lambda_g \in \Lambda_g$ und $m_h \in M_h$, dass $\rho_M(\lambda_g.m_h) = \lambda_g.m_h \otimes gh$, also nach dem Beweis von (1) $\lambda_g.m_h \in M_{gh}$. Damit ist M ein G-graduierter Modul.

Der Rest der Behauptung folgt direkt aus der Konstruktion der Graduierung und der Definition von Komodulmorphismen.

□

Korollar 2.1.7. *Sei Λ eine G-graduierte Algebra. Dann ist* $\operatorname{Mod}\operatorname{gr}\Lambda$ *eine abelsche Kategorie.*

Beweis. Seien $M, N \in \operatorname{Mod}\operatorname{gr}\Lambda$. Es ist $\operatorname{Hom}_{\operatorname{gr}\Lambda}(M,N) = \operatorname{Hom}_\Lambda(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{F}(N)) \cap \operatorname{Hom}_{\operatorname{Comod} kG}(M,N)$ eine Untergruppe von $\operatorname{Hom}_k(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{F}(N))$, also ist die Kategorie additiv. Die direkte Summe von M und N in der Kategorie der kG-Komoduln ist die direkte Summe $M \oplus N$ in der Kategorie der Vektorräume zusammen mit den kanonischen linearen Abbildungen und auch die durch die universelle Eigenschaft induzierten Abbildungen stimmen mit den durch $M \oplus N$ induzierten k-linearen Abbildungen überein. Dies gilt ebenfalls für die direkte Summe von M und N in der Kategorie der Λ-Moduln. Also ist $M \oplus N$ direkte Summe von M und N in $\operatorname{Mod}\operatorname{gr}\Lambda$. Dasselbe Argument zeigt, dass jeder Morphismus f einen Kern und einen Kokern hat und dass der kanonische Morphismus $\operatorname{coim}(f) \to \operatorname{im}(f)$ ein Isomorphismus ist. Also ist $\operatorname{Mod}\operatorname{gr}\Lambda$ eine abelsche Kategorie. □

Wir zeigen nun, dass für endlichdimensionales Λ die Kategorie $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ eine Krull-Schmidt-Kategorie ist, also eine Kategorie, in der Endomorphismenringe unzerlegbarer Objekte lokal sind.

Proposition 2.1.8. *Seien Λ eine endlichdimensionale G-graduierte Algebra und $M \in \operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$. Dann ist M genau dann unzerlegbar, wenn* $\operatorname{End}_{\operatorname{gr}\Lambda}(M)$ *lokal ist.*

Beweis. Sei $\operatorname{End}_{\operatorname{gr}\Lambda}(M)$ nicht lokal. Wegen $\dim \operatorname{End}_{\operatorname{gr}\Lambda}(M) < \infty$ existiert dann ein idempotentes Element $f \in \operatorname{End}_{\operatorname{gr}\Lambda}(M)$ mit $f \neq 0, \operatorname{id}_M$. Wir zeigen, dass $M = \operatorname{im}(f) \oplus \ker(f)$. Sei $x \in \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$. Da f idempotent ist, gilt $f|_{\operatorname{im}(f)} = \operatorname{id}_{\operatorname{im}(f)}$ und wir erhalten $0 = f(x) = x$. Es folgt $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = (0)$ und $\operatorname{im}(f) + \ker(f) = \operatorname{im}(f) \oplus \ker(f)$. Wegen $\dim(\operatorname{im}(f) \oplus \ker(f)) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f))$ folgt mit der Dimensionsformel, dass $M = \operatorname{im}(f) \oplus \ker(f)$. Mit $f \neq \operatorname{id}_M, 0$ folgt $\operatorname{im}(f) \neq M$ und $\ker(f) \neq M$. Nach 2.1.7 sind $\operatorname{im}(f)$ und $\ker(f)$ homogene Untermoduln, also ist M nicht unzerlegbar in $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$.

Sei umgekehrt M nicht unzerlegbar, d.h. es existieren graduierte Untermoduln $(0) \neq M_1, M_2 \subseteq M$ mit $M = M_1 \oplus M_2$. Sei $\pi : M \to M_1 \to M$ der von der kanonischen Projektion induzierte graduierte Endomorphismus. Dann ist π idempotent und $\pi \neq \operatorname{id}_M, 0$. Da in lokalen Ringen 0 und 1 die einzigen idempotenten Elemente sind, ist also $\operatorname{End}_{\operatorname{gr}\Lambda}(M)$ nicht lokal.

□

Die folgende einfache Aussage zeigt, wie sich Morphismenräume graduierbarer Moduln auf kanonische Weise graduieren lassen, wenn einige Bedingungen an die Graduierung erfüllt sind.

Proposition 2.1.9. *Seien G eine abelsche Gruppe, Λ eine G-graduierte Algebra und M, N graduierte Λ-Moduln mit endlichem Träger.*

(1) Der Vektorraum $\operatorname{Hom}_\Lambda(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{F}(N))$ ist ein graduierter Modul über der graduierten Algebra $\operatorname{End}_\Lambda(\mathfrak{F}(N))$. Die Graduierung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_\Lambda(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{F}(N))_i =&\{f \in \operatorname{Hom}_\Lambda(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{F}(N)) \\ &|\forall j \in G : f(M_j) \subseteq M_{i+j}\}.\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\operatorname{Hom}_{\mathrm{gr}\Lambda}(M, N) = \operatorname{Hom}_\Lambda(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{F}(N))_0$.

(2) Der Vektorraum $M^* = \operatorname{Hom}_k(M, k)$ ist ein graduierter Λ^{op}-Modul mit

$$M_i^* = \{\varphi \in M^* | \forall j \in G \setminus \{-i\} : \varphi(M_j) = (0)\}.$$

Ist Λ endlichdimensional, so induziert die Standarddualität $D : \operatorname{mod}\Lambda \to \operatorname{mod}\Lambda^{op}$ auf diese Weise eine Dualität $D : \operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda \to \operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda^{op}$ mit $D \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{F} \circ D$.

Beweis. (1) Es ist klar, dass die Summe $\sum_{i\in G} \operatorname{Hom}_\Lambda(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{F}(N))_i$ direkt ist. Für alle $k \in G$ seien $p_k : \bigoplus_{j\in G} M_j \to M_k$ sowie $p'_k : \bigoplus_{j\in G} N_j \to N_k$ die kanonischen Projektionen. Sei $f \in \operatorname{Hom}_\Lambda(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{F}(N))$. Für alle $k \in G$ sei

$$f_k = \sum_{j\in G} p'_{j+k} \circ f \circ p_j.$$

Dann gilt für alle $j \in G$, dass $f_k(M_j) \subseteq N_{j+k}$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j\in G} f|_{M_j} \\ &= \sum_{j\in G} f \circ p_j \\ &= \sum_{j\in G}\sum_{i\in G} p'_i \circ f \circ p_j \\ &= \sum_{j\in G}\sum_{k\in G} p'_{j+k} \circ f \circ p_j \\ &= \sum_{k\in G}\sum_{j\in G} p'_{j+k} \circ f \circ p_j \\ &= \sum_{k\in G} f_k, \end{aligned}$$

wobei jeweils alle bis auf endliche viele Summanden Null sind und wir die Summen daher vertauschen dürfen. Für alle $\lambda_i \in \Lambda_i, x_j \in M_j$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k\in G} \lambda_i f_k(x_j) &= \lambda_i f(x_j) \\ &= f(\lambda_i x_j) \\ &= \sum_{k\in G} f_k(\lambda_i x_j). \end{aligned}$$

Wegen $\lambda_i f_k(x_j), f_k(\lambda_i x_j) \in N_{i+j+k}$ folgt aufgrund der Eindeutigkeit der Summendarstellung, dass $f_k(\lambda_i x_j) = \lambda_i f_k(x_j)$ für alle $k \in G$. Damit sind die f_k jeweils Λ-linear. Aus der Definition von $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{F}(N))_i$ und $\mathrm{End}_\Lambda(\mathfrak{F}(N))_j$ folgt direkt, dass die anderen Bedingungen an graduierte Moduln und Algebren erfüllt sind.

(2) Seien $f \in M^*$ und p_i jeweils wie oben. Dann gilt $f = \sum_{i \in G} f \circ p_{-i}$, also $M^* = \bigoplus_{i \in G} M_i^*$. Seien $\lambda \in \Lambda_j$ und $f \in M_i^*$ für $i, j \in G$. Für alle $k \in G$ mit $-i-j \neq k$ und $x \in M_k$ gilt dann $\lambda x \in M_{k+j} \neq M_{-i}$, also $(\lambda f)(x) = f(\lambda x) = 0$. Damit erhalten wir $\lambda f \in M_{i+j}^*$, also ist M^* ein G-graduierter Λ^{op}-Modul. Es ist klar, dass dadurch eine Dualität $\mathrm{mod}\,\mathrm{gr}\,\Lambda \to \mathrm{mod}\,\mathrm{gr}\,\Lambda^{op}$ definiert wird.

□

Die folgende Bemerkung folgt direkt aus den Definitionen.

Bemerkung 2.1.10. *Seien G, Λ, M, N wie in 2.1.9. Dann gilt für alle $i \in G$*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}\Lambda}(M[i], N) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{F}(N))_i = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}\Lambda}(M, N[-i]).$$

Im Falle einer abelschen Gruppe G erhalten wir einen Zusammenhang zwischen G-graduierten Algebren und der Darstellungstheorie von Gruppenschemata.

Proposition 2.1.11. *Seien G eine abelsche Gruppe, kG die Gruppenalgebra und $\mathcal{G}$ das zugehörige affine Gruppenschema.*

(1) Eine Algebra Λ ist genau dann G-graduiert, wenn es eine lineare Darstellung $\mathcal{G} \to \mathrm{Aut}_\Lambda$ gibt, so dass $\mathcal{G}(R)$ auf $\Lambda \otimes R$ jeweils durch Algebrenautomorphismen operiert. Die homogenen Unteralgebren von Λ sind genau die Unteralgebren Γ, so dass $\Gamma \otimes R$ für jede kommutative k-Algebra R invariant unter $\mathcal{G}(R)$ ist.

(2) Sind Λ eine G-graduierte Algebra und M ein Λ-Modul, so ist M genau dann G-graduiert, wenn es eine lineare Darstellung $\mathcal{G} \to \mathrm{Aut}_M$ mit

$$g.(\lambda.m) = (g.\lambda).(g.m) \tag{2.2}$$

für alle $g \in \mathcal{G}(R)$, $\lambda \in \Lambda \otimes R$, $m \in M \otimes R$ und jede kommutative k-Algebra R gibt. Die homogenen Untermoduln von M sind genau die Untermoduln N, so dass $N \otimes R$ jeweils invariant unter $\mathcal{G}(R)$ ist.

Beweis. (1) Nach 1.3.3 entsprechen die kG-Komoduln genau den linearen Darstellungen von $\mathcal{G}$. Sei $\Phi : \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}_\Lambda$ eine Darstellung, so dass $\mathcal{G}(R)$ stets durch Algebrenautomorphismen operiert. Dann ist insbesondere $\Phi_{kG}(\mathrm{id}_{kG})$ ein Algebrenautomorphismus. Nach Definition der zugehörigen Komodulstruktur ist dann $\rho : \Lambda \to \Lambda \otimes kG$ ein Algebrenhomomorphismus, also ist nach 2.1.6 Λ eine G-graduierte Algebra.

Sei umgekehrt Λ eine G-graduierte Algebra und ρ die zugehörige Komodulstruktur gemäß 2.1.6. Seien $\Phi : \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}_\Lambda$ die zugehörige lineare Darstellung und R eine kommutative k-Algebra. Sei $x \in \mathcal{G}(R)$. Dann operiert $\Phi_R(x)$ auf $\Lambda \otimes 1 \subseteq \Lambda \otimes R$

durch den Algebrenhomomorphismus $(\mathrm{id}_\Lambda \otimes x) \circ \rho \circ \psi$, wobei $\psi : \Lambda \otimes k \to \Lambda$ der kanonische Isomorphismus ist. Da $\Phi_R(x)$ R-linear ist, folgt für alle $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ $r, r' \in R$, dass

$$\begin{aligned}\Phi_R(x)((\lambda \otimes r)(\lambda' \otimes r')) &= rr'\Phi_R(x)((\lambda \otimes 1)(\lambda' \otimes 1)) \\ &= rr'\Phi_R(x)(\lambda \otimes 1)\Phi_R(x)(\lambda' \otimes 1) \\ &= \Phi_R(x)(\lambda \otimes r)\Phi_R(x)(\lambda' \otimes r').\end{aligned}$$

Damit ist $\Phi_R(x)$ ein Algebrenautomorphismus. Also operiert $G(R)$ durch Algebrenautomorphismen und es gilt (1).

(2) Operiere zunächst $\mathcal{G}$ vermöge $\Phi : \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}_\Lambda$ und $\Psi : \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}_M$, so dass 2.2 erfüllt ist. Seien ρ_Λ, ρ_M die entsprechenden kG-Komodulstrukturen auf Λ und M gemäß 1.3.3. Dann gilt für alle $\lambda \in \Lambda$, $m \in M$

$$\begin{aligned}\rho_M(\lambda m) &= \Psi_{kG}(\mathrm{id}_{kG})(\lambda m \otimes 1) \\ &= \Phi_{kG}(\mathrm{id}_{kG})(\lambda \otimes 1).\Psi_{kG}(\mathrm{id}_{kG})(m \otimes 1) \\ &= \rho_\Lambda(\lambda).\rho_M(m).\end{aligned}$$

Nach 2.1.6 ist M also ein G-graduierter Modul.

Seien umgekehrt M ein G-graduierter Modul, ρ_Λ, ρ_M die zugehörigen Komodulstrukturen gemäß 2.1.6 und $\Phi : \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}_\Lambda$ und $\Psi : \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}_M$ die zugehörigen linearen Darstellungen gemäß (1) und 1.3.3. Seien R eine kommutative k-Algebra, $x \in \mathcal{G}(R)$, $\lambda \in \Lambda$ und $m \in M$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Psi_R(x)(\lambda m \otimes 1) &= (\mathrm{id}_M \otimes x) \circ \rho_M(\lambda.m) \\ &= (\mathrm{id}_M \otimes x)(\rho_\Lambda(\lambda).\rho_M(m)) \\ &= (\mathrm{id}_\Lambda \otimes x) \circ \rho_\Lambda(\lambda).(\mathrm{id}_M \otimes x) \circ \rho_M(m) \\ &= \Phi_R(x)(\lambda \otimes 1).\Psi_R(x)(m \otimes 1),\end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichheit folgt, da die kG-Modulstruktur auf kG durch Multiplikation gegeben und x ein Algebrenhomomorphismus ist, wodurch sich $(\mathrm{id}_M \otimes x)$ auf die zu $\rho_\Lambda(\lambda)$ und $\rho_M(m)$ gehörigen Elementartensoren verteilen lässt. Damit ist 2.2 auf $M \otimes 1$ erfüllt. Sind nun zusätzlich $r, r' \in R$, so folgt

$$\begin{aligned}\Psi_R(x)(\lambda m \otimes rr') &= rr'(\Phi_R(x)(\lambda \otimes 1).\Psi_R(x)(m \otimes 1)) \\ &= \Phi_R(x)(\lambda \otimes r).\Psi_R(x)(m \otimes r'),\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit mit Definition der R-Modulstruktur auf R durch Multiplikation folgt. Also ist 2.2 erfüllt und es gilt die Behauptung.

□

Seien G und $\mathcal{G}$ wie in 2.1.11 und Λ eine G-graduierte Algebra. Als Anwendung zeigen wir, dass das Zentrum $Z(\Lambda)$ homogen ist. Ist R eine kommutative k-Algebra, so gilt $Z(\Lambda \otimes R) = Z(\Lambda) \otimes Z(R) = Z(\Lambda) \otimes R$. Da das Zentrum einer Algebra stets invariant unter Automorphismen ist, ist $Z(\Lambda) \otimes R$ invariant unter $\mathcal{G}(R)$. Damit ist $Z(\Lambda)$ homogen.

Korollar 2.1.12. *Seien G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, kG die Gruppenalgebra, $\mathcal{G}$ das durch kG definierte affine Gruppenschema und $T = \mathcal{G}(k)$. Es gelte $k[T] \cong kG$. Dann gilt:*

(1) Eine Algebra Λ ist genau dann G-graduiert, wenn Λ ein rationaler T-Modul ist, so dass T durch Algebrenautomorphismen auf Λ operiert. Eine Unteralgebra von Λ ist genau dann homogen, wenn sie invariant unter der Operation von T ist.

(2) Ist Λ eine G-graduierte Algebra und M ein Λ-Modul, so ist M genau dann G-graduiert, wenn M ein rationaler T-Modul ist, so dass für alle $t \in T$, $\lambda \in \Lambda$ und $m \in M$

$$t.(\lambda.m) = (t.\lambda).(t.m)$$

gilt. Die homogenen Untermoduln entsprechen genau den Untermoduln, die invariant unter der Operation von T sind. Sind M, N graduierte Λ-Moduln, so sind die graduierten Morphismen $M \to N$ genau die T-äquivarianten Λ-linearen Abbildungen $M \to N$.

Beweis. Dies folgt direkt aus 2.1.11 und 1.3.4. □

In der Darstellungstheorie reduktiver algebraischer Gruppen in positiver Charakteristik treten graduierte Algebren meist in der Form des folgenden Beispiels auf.

Beispiel. Ist $G = \mathbb{Z}^n$, so ist das Gruppenschema $\mathcal{G}$ aus 2.1.11 isomorph zu $\prod_{1=1}^{n} \mathcal{G}_m$, wobei $\mathcal{G}_m(R)$ jeweils die Einheitengruppe von R sei. Dann ist $T = \mathcal{G}(k) = (k \setminus \{0\})^n$ ein n-dimensionaler Torus und es gilt $k[T] \cong k\mathbb{Z}^n$, da $\mathbb{Z}^n$ isomorph zur Charaktergruppe von T ist (vgl. [12]). Eine Algebra Λ ist nach 2.1.12 also genau dann $\mathbb{Z}^n$-graduiert, wenn sie ein rationaler T-Modul ist. Der Torus T operiert dabei auf Λ_i durch

$$\forall t \in T, x \in \Lambda_i : t.x = t^i \cdot x,$$

wobei

$$t^i \cdot x = t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n} \cdot x.$$

2.1.12 ist nützlich, um ohne Rechnung Eigenschaften von graduierten Algebren und Moduln nachzuweisen. Die Tatsache, dass T durch Automorphismen operiert, hat die Konsequenz, dass Mengen, die invariant unter Automorphismen sind, invariant unter T sind, wodurch sich oft Homogenität nachweisen lässt. Da sich Darstellungen von Gruppen außerdem günstig unter vielen Konstruktionen verhalten, sind diese Konstruktionen häufig mit Graduierbarkeit verträglich. Wir geben eine Anwendung:

Korollar 2.1.13. *Sei G eine Gruppe, so dass die Voraussetzungen von 2.1.12 erfüllt sind, Λ eine G-graduierte Algebra und M ein G-graduierter Λ-Modul. Dann ist* $\mathrm{Rad}(\mathfrak{F}(M))$ *ein homogener Untermodul von M.*

Beweis. Sei T wie in 2.1.12. Da Automorphismen die maximalen Ideale von $\mathfrak{F}(\Lambda)$ permutieren, ist $\mathrm{Rad}(\mathfrak{F}(\Lambda))$ als Durchschnitt aller maximalen Ideale von $\mathfrak{F}(\Lambda)$ T-invariant. Also ist auch $\mathrm{Rad}(\mathfrak{F}(M)) = \mathrm{Rad}(\mathfrak{F}(\Lambda))\mathfrak{F}(M)$ T-invariant und damit homogen. $\square$

Es folgt, dass unter den Voraussetzungen von 2.1.13 für $M \in \mathrm{mod}\,\mathrm{gr}\,\Lambda$ stets $\mathrm{Top}(\mathfrak{F}(M)) = \mathfrak{F}(M)/\mathrm{Rad}(\mathfrak{F}(M))$ graduierbar und die Projektion $M \to \mathrm{Top}(\mathfrak{F}(M))$ ein graduierter Morphismus ist. Mit der Dualitätsaussage aus 2.1.9 folgt, dass auch $\mathrm{Soc}(\mathfrak{F}(M))$ graduierbar und die Inklusion $\mathrm{Soc}(\mathfrak{F}(M)) \to M$ ein graduierter Morphismus, also $\mathrm{Soc}(\mathfrak{F}(M))$ ein homogener Untermodul von M ist. Wir betrachten $\mathrm{Top}(\mathfrak{F}(M))$ und $\mathrm{Soc}(\mathfrak{F}(M))$ stets als auf diese Weise graduiert und schreiben $\mathrm{Top}(M) = \mathrm{Top}(\mathfrak{F}(M))$ und $\mathrm{Soc}(M) = \mathrm{Soc}(\mathfrak{F}(M))$.

Das folgende einfache Lemma zeigt, wie sich zerfallende exakte Folgen unter dem Vergissfunktor verhalten.

Lemma 2.1.14. *Seien G eine abelsche Gruppe und Λ eine G-graduierte Algebra. Eine exakte Folge*

$$(0) \longrightarrow X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z \longrightarrow (0)$$

in $\mathrm{Mod}\,\mathrm{gr}\,\Lambda$*, so dass X, Y und Z einen endlichen Träger haben, zerfällt genau dann, wenn die Folge*

$$(0) \longrightarrow \mathfrak{F}(X) \xrightarrow{\mathfrak{F}(i)} \mathfrak{F}(Y) \xrightarrow{\mathfrak{F}(p)} \mathfrak{F}(Z) \longrightarrow (0)$$

in $\mathrm{Mod}\,\Lambda$ *zerfällt.*

Beweis. Sei $\mathfrak{F}(p)$ ein zerfallender Epimorphismus in $\mathrm{Mod}\,\Lambda$. Dann existiert $h \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathfrak{F}(Z), \mathfrak{F}(Y))$ mit $\mathfrak{F}(p) \circ h = \mathrm{id}_{\mathfrak{F}(Z)}$. Zerlegen wir $h = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} h_j$ in homogene Komponenten gemäß 2.1.9, so liefert ein Koeffizientenvergleich, dass $\mathfrak{F}(p) \circ h_0 = \mathrm{id}_{\mathfrak{F}(Z)}$. Da h_0 Morphismus in $\mathrm{mod}\,\mathrm{gr}\,\Lambda$ ist, folgt $\mathfrak{F}(p \circ h_0) = \mathfrak{F}(\mathrm{id}_Z)$. Wir erhalten $p \circ h_0 = \mathrm{id}_Z$, weil $\mathfrak{F}$ treu ist. Damit ist p ein zerfallender Epimorphismus in $\mathrm{Mod}\,\mathrm{gr}\,\Lambda$.

Die andere Implikation ist klar. $\square$

2.2 Graduierbarkeit von Moduln und Erhaltung von Eigenschaften durch den Vergissfunktor

In diesem Abschnitt sei Λ stets eine endlichdimensionale $\mathbb{Z}^n$-graduierte Algebra, wenn dies nicht anders definiert wird. Dann haben alle Objekte von $\mathrm{mod}\,\mathrm{gr}\,\Lambda$ einen endlichen Träger. Wir zeigen, dass der Vergissfunktor $\mathfrak{F} : \mathrm{mod}\,\mathrm{gr}\,\Lambda \to \mathrm{mod}\,\Lambda$ viele Eigenschaften von Objekten und Morphismen erhält, etwa Unzerlegbarkeit. Damit lässt sich leicht die Graduierbarkeit von einfachen, projektiven und injektiven Moduln nachweisen. Außerdem zeigen wir, dass sich verschiedene Graduierungen auf einem unzerlegbaren, graduierbaren Λ-Modul M ineinander überführen lassen.

Definition 2.2.1. *Eine Teilmenge $S \subseteq \Lambda$ einer k-Algebra Λ heißt eine* ***Lie-Menge****, wenn $[x, y] = xy - yx \in S$ für alle $x, y \in S$.*

Als Hilfsmittel brauchen wir einen klassischen Satz aus der Lie-Theorie, für dessen Beweis wir auf [13] verweisen.

Satz 2.2.2. *(Engel-Jacobson)*
Seien Λ eine endlichdimensionale k-Algebra und $S \subseteq \Lambda$ eine Lie-Menge. Sind alle Elemente von S nilpotent, so ist die von S erzeugte assoziative Algebra ohne Eins nilpotent.

Der folgende Satz ist das entscheidende Werkzeug beim Beweis der Aussage, dass der Vergissfunktor unzerlegbare Objekte von $\operatorname{mod} \operatorname{gr} \Lambda$ auf unzerlegbare Objekte von $\operatorname{mod} \Lambda$ abbildet.

Satz 2.2.3. *[6]*
Es sei Λ_0 lokal. Dann ist Λ lokal und es gilt $\Lambda/\mathrm{Rad}(\Lambda) \cong \Lambda_0/\mathrm{Rad}(\Lambda_0)$.

Beweis. Für alle $i \in \mathbb{Z}^n$ sei

$$N_i = \{x \in \Lambda_i | x \text{ ist nilpotent}\}.$$

Wir zeigen, dass $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}^n} N_i$ eine Lie-Menge ist. Wegen $\Lambda_i = 0$ für alle bis auf endlich viele $i \in \mathbb{Z}^n$ und $\Lambda_i^j \subseteq \Lambda_{ji}$ für alle $i \in \mathbb{Z}^n, j \in \mathbb{Z}$ gilt $N_i = \Lambda_i$ für $i \neq 0$. Es gilt $N_0 = \mathrm{Rad}(\Lambda_0)$, weil Λ_0 endlichdimensional und lokal ist. Sind $i, k \in \mathbb{Z}^n$ mit $i \neq -k$ sowie $x \in \Lambda_i$ und $y \in \Lambda_k$, so haben wir $[x, y] = xy - yx \in \Lambda_{i+k} = N_{i+k}$.

Ist $y \in N_{-i}$, so sind $xy, yx \in \Lambda_0$ Nullteiler, also nicht invertierbar. Da Λ_0 lokal ist, folgt $xy, yx \in \mathrm{Rad}(\Lambda_0) = N_0$, also $[x, y] \in N_0$. Damit ist $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}^n} N_i$ eine Lie-Menge. Nach 2.2.2 ist dann $N = \bigoplus_{i\in Z^n} N_i$ nilpotent, d.h. $N \subseteq \mathrm{Rad}(\Lambda)$. Da $\Lambda/N \cong \Lambda_0/\mathrm{Rad}(\Lambda_0)$ eine Divisionsalgebra ist, gilt $N = \mathrm{Rad}(\Lambda)$ und die Behauptung folgt. □

Korollar 2.2.4. *Ein Modul $M \in \operatorname{mod} \operatorname{gr} \Lambda$ ist genau dann unzerlegbar in $\operatorname{mod} \operatorname{gr} \Lambda$, wenn $\mathfrak{F}(M)$ unzerlegbar in $\operatorname{mod} \Lambda$ ist.*

Beweis. Sei $M \in \operatorname{mod} \operatorname{gr} \Lambda$ unzerlegbar. Nach 2.1.9 ist $\mathrm{End}_\Lambda(\mathfrak{F}(M))$ eine graduierte k-Algebra mit $\mathrm{End}_\Lambda(\mathfrak{F}(M))_0 = \mathrm{End}_{\mathrm{gr}\Lambda}(M)$. Da M unzerlegbar ist, ist $\mathrm{End}_{\mathrm{gr}\Lambda}(M)$ nach 2.1.8 lokal. Nach 2.2.3 ist dann auch $\mathrm{End}_\Lambda(\mathfrak{F}(M))$ lokal, also $\mathfrak{F}(M)$ unzerlegbar. Die andere Richtung ist klar. □

Beim Beweis von 2.2.3 wurden die Torsionsfreiheit von $\mathbb{Z}^n$ und die Endlichkeit des Trägers von Λ verwendet. Das folgende Beispiel zeigt, dass sich 2.2.3 und 2.2.4 nicht ohne Weiteres auf allgemeinere Situationen übertragen lassen.

Beispiel.

(1) Sei $\Lambda = k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynomring in n Variablen über k zusammen mit der natürlichen $\mathbb{Z}^n$-Graduierung auf Λ. Dann ist $\Lambda_0 = k$ lokal, aber Λ ist nicht lokal: Das von $X_1, \ldots, X_n$ erzeugte Ideal I ist maximal, da $\Lambda/I \cong k$, enthält aber nicht $X_1 + 1$, da sonst $1 \in I$ wäre. Da $X_1 + 1$ keine Einheit ist, kann Λ nicht lokal sein.

(2) Sei G eine endliche abelsche Gruppe mit $|G| > 1$ und $\Lambda = \mathbb{C}G$ die Gruppenalgebra von G über $\mathbb{C}$. Dann ist Λ auf natürliche Weise G-graduiert und Λ_0 ist lokal, weil Λ_0 eindimensional ist. Λ ist kommutativ und nach dem Satz von Maschke halbeinfach, also nach dem Satz von Wedderburn-Artin ein Produkt von endlichen Erweiterungskörpern von $\mathbb{C}$. Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, folgt $\Lambda \cong \mathbb{C}^{|G|}$. Damit ist Λ nicht lokal.

(3) Jedes endlichdimensionale Gegenbeispiel Λ für ein zu 2.2.3 analoges Resultat liefert auch sofort ein Gegenbeispiel zur Korollar 2.2.4 entsprechenden Aussage: Es ist nämlich $\mathrm{End}_\Lambda(\mathfrak{F}(\Lambda)) \cong \Lambda^{op}$ nicht lokal, also $\mathfrak{F}(\Lambda)$ kein unzerlegbares Objekt in $\mathrm{mod}\,\Lambda$. Da aber $\mathrm{End}_{\mathrm{gr}\Lambda}(\Lambda) = \mathrm{End}_\Lambda(\mathfrak{F}(\Lambda))_0 \cong \Lambda_0^{op}$ lokal ist, ist Λ unzerlegbares Objekt von $\mathrm{mod}\,\mathrm{gr}\,\Lambda$.

Die Beispiele zeigen, dass 2.2.3 der entscheidende Ansatzpunkt ist, um zu den Resultaten dieser Arbeit analoge Ergebnisse für andere Klassen graduierter Algebren zu erzielen. Für Körper der Charakteristik $p > 0$ und Algebren und Moduln, die durch p-Gruppen graduiert sind, wird in [5] ein 2.2.3 entsprechender Satz bewiesen.

Mit 2.2.4 können wir leicht die Graduierbarkeit verschiedener Klassen von Moduln nachweisen.

Proposition 2.2.5. *(1) Seien $M \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ graduierbar und N ein direkter Summand von M. Dann ist N graduierbar.*

(2) Sei $P \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ projektiv oder injektiv. Dann ist P graduierbar.

(3) Ein Modul $S \in \mathrm{mod}\,\mathrm{gr}\,\Lambda$ ist genau dann einfach, wenn $\mathfrak{F}(S) \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ einfach ist.

(4) Sei $S \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ einfach. Dann ist S graduierbar.

Beweis. (1) Sei $X \in \mathrm{mod}\,\mathrm{gr}\,\Lambda$ mit $\mathfrak{F}(X) = M$. Ist $X = \bigoplus_{i=1}^m X_i$ eine Zerlegung in unzerlegbare Objekte aus $\mathrm{mod}\,\mathrm{gr}\,\Lambda$, so impliziert 2.2.4, dass $M \cong \bigoplus_{i=1}^m \mathfrak{F}(X_i)$ eine Zerlegung von M in unzerlegbare Λ-Moduln ist. Nach Satz von Krull-Remak-Schmidt ist jeder direkte Summand von M direkte Summe passender $\mathfrak{F}(X_i)$, also graduierbar.

(2) Da die unzerlegbaren projektiven Moduln gerade die unzerlegbaren direkten Summanden von Λ sind, folgt dies für projektive Moduln aus (1). Mit der Aussage über Dualität aus 2.1.9 folgt daraus die Behauptung für injektive Moduln.

(3) Sei $S \in \mathrm{mod}\,\mathrm{gr}\,\Lambda$ einfach. Dann ist $\mathfrak{F}(S)$ nach 2.2.4 unzerlegbar in $\mathrm{mod}\,\Lambda$. Da $\mathrm{Rad}(\mathfrak{F}(S))$ nach 2.1.13 ein homogener Untermodul von $\mathfrak{F}(S)$ ist, folgt aus der Einfachheit von S, dass $\mathrm{Rad}(\mathfrak{F}(S)) = (0)$. Damit ist $\mathfrak{F}(S)$ halbeinfach und unzerlegbar, also einfach. Die andere Richtung ist klar.

(4) Seien S einfacher Λ-Modul und $P(S)$ projektive Decke von S in $\mathrm{mod}\,\Lambda$. Dann gilt $P(S)/\mathrm{Rad}(P(S)) \cong S$. Nach (2) ist $P(S)$ graduierbar und nach 2.1.13 ist $\mathrm{Rad}(P(S))$ homogener Untermodul von $P(S)$. 2.1.4 liefert nun, dass S graduierbar ist.

□

2.2.5 ermöglicht es uns, die Existenz projektiver Decken und injektiver Hüllen in $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ nachzuweisen. Dazu beweisen wir zunächst ein einfaches Lemma, dessen Beweis genau wie die entsprechende Aussage für $\operatorname{mod}\Lambda$ funktioniert. Wir nennen einen homogenen Untermodul $N \subseteq M$ eines graduierten Λ-Moduls **überflüssig**, wenn für jeden homogenen Untermodul $X \subseteq M$ mit $X + N = M$ folgt, dass $X = M$. Ist $M \in \operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$, so ist $\operatorname{Rad}(\mathfrak{F}(M))$ stets überflüssig, weil $\operatorname{Rad}(\mathfrak{F}(M))$ in jedem maximalen Untermodul von $\mathfrak{F}(M)$ enthalten ist.

Lemma 2.2.6. *Seien $P, M \in \operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ und $f : P \to M$ ein graduierter Epimorphismus, so dass $\ker(f)$ überflüssig ist. Seien $N \in \operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$, $g : N \to M$ ein graduierter Epimorphismus und $\varphi : N \to P$ ein graduierter Morphimus mit $g = f \circ \varphi$. Dann ist φ surjektiv.*

Beweis. Wir zeigen, dass $P = \ker(f) + \operatorname{im}(\varphi)$, woraus nach Voraussetzung folgt, dass φ surjektiv ist.

Sei $x \in P$. Dann existiert ein $y \in N$ mit $f(x) = g(y) = f \circ \varphi(y)$ und es folgt $f(x) - f \circ \varphi(y) = 0$, also $x - \varphi(y) \in \ker(f)$ und damit $x \in \ker(f) + \operatorname{im}(\varphi)$, wie zu zeigen war. □

Ist in der Situation von 2.2.6 P projektiv, so folgt sofort, dass $f : P \to M$ projektive Decke von M ist.

Proposition 2.2.7. *(1) Die Kategorie $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ hat projektive Decken.*

(2) Ist $f : P \to M$ eine projektive Decke in $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$, so ist $\mathfrak{F}(f) : \mathfrak{F}(P) \to \mathfrak{F}(M)$ eine projektive Decke in $\operatorname{mod}\Lambda$.

Beweis. (1) Sei zunächst $S \in \operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ einfach. Nach 2.2.5 existiert dann ein projektiv unzerlegbarer graduierter Modul $P \in \operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$, so dass $f : \mathfrak{F}(P) \to \mathfrak{F}(S)$ eine projektive Decke von $\mathfrak{F}(S)$ ist. Ist $f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^n} f_i$ eine Zerlegung in homogene Komponenten von $\operatorname{Hom}_\Lambda(\mathfrak{F}(P), \mathfrak{F}(S))$, so existiert wegen $f \neq 0$ ein $i \in \mathbb{Z}^n$ mit $f_i \neq 0$. Da S einfach und $\mathfrak{F}(P)$ lokal ist, ist f_i ein Epimorphismus und $\ker(f_i) = \operatorname{Rad}(\mathfrak{F}(P))$. Weil $\operatorname{Rad}(\mathfrak{F}(P))$ überflüssig ist, ist nach 2.2.6 $f_i : P[i] \to S$ projektive Decke von S in $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ und $\mathfrak{F}(f_i) : \mathfrak{F}(P[i]) \to \mathfrak{F}(S)$ projektive Decke von $\mathfrak{F}(S)$ in $\operatorname{mod}\Lambda$.

Sei jetzt $M \in \operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ und $\operatorname{Top}(M) = \bigoplus_{i=1}^m S_i$ eine Zerlegung von $\operatorname{Top}(M)$ in einfache Summanden. Sei jeweils $p_i : P_i \to S_i$ eine projektive Decke in $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$, so dass $\mathfrak{F}(p_i) : \mathfrak{F}(P_i) \to \mathfrak{F}(S_i)$ projektive Decke in $\operatorname{mod}\Lambda$ ist. Dann ist $P = \bigoplus_{i=1}^m P_i$ projektive Decke von $\operatorname{Top}(M)$ vermöge $p = \sum_{i=1}^m p_i : P \to \operatorname{Top}(M)$, da $\ker(p) = \bigoplus_{i=1}^m \operatorname{Rad}(\mathfrak{F}(P_i)) = \operatorname{Rad}(\mathfrak{F}(P))$ überflüssig ist. Wir zeigen, dass P auch projektive Decke von M ist. Sei $p' : M \to \operatorname{Top}(M)$ die kanonische Projektion. Dann ist p' ein graduierter Morphismus, da $\operatorname{Rad}(\mathfrak{F}(M))$ homogen ist. Aufgrund der Projektivität von P existiert ein graduierter Morphismus $f : P \to M$ mit $p = p' \circ f$. Da $\ker(p') = \operatorname{Rad}(\mathfrak{F}(M))$ überflüssig ist, folgt mit 2.2.6, dass f surjektiv ist. Außerdem folgt mit $\ker(p) = \operatorname{Rad}(\mathfrak{F}(P))$, dass $\ker(f) \subseteq \operatorname{Rad}(\mathfrak{F}(P))$ ebenfalls überflüssig ist. Wiederum mit 2.2.6 folgt, dass $f : P \to M$ projektive Decke von M ist.

(2) Dies folgt aus der Konstruktion der projektiven Decke im Beweis von (1). $\square$

Korollar 2.2.8. *(1) Die Kategorie* $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ *hat injektive Hüllen.*

(2) Ist $f : M \to I$ *eine injektive Hülle in* $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$, *so ist* $\mathfrak{F}(f) : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(I)$ *injektive Hülle in* $\operatorname{mod}\Lambda$.

(3) Seien $S \in \operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ *einfach und* I *injektive Hülle von* S *in* $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$. *Dann gilt* $\operatorname{Soc}(I) = S$ *und jeder graduierte Modul* $M \in \operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ *mit* $\operatorname{Soc}(M) = S$ *lässt sich in* I *einbetten.*

Beweis. Die ersten beiden Aussagen sind die dualen Aussagen zu 2.2.7. Die dritte Aussage folgt durch Dualisieren aus dem Beweis von 2.2.7. $\square$

2.2.7 liefert uns ebenfalls die Graduierbarkeit von Ext-Gruppen und einen Zusammenhang zwischen den homogenen Komponenten der Ext-Gruppen in $\operatorname{mod}\Lambda$ und $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$.

Korollar 2.2.9. *Seien* $m \in \mathbb{N}$ *und* $M, N \in \operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$. *Dann ist* $\operatorname{Ext}^m_\Lambda(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{F}(N))$ *ein* $\mathbb{Z}^n$*-graduierter Vektorraum mit*

$$\operatorname{Ext}^m_{\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda}(M[i], N) \cong \operatorname{Ext}^m_\Lambda(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{F}(N))_i \cong \operatorname{Ext}^m_{\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda}(M, N[-i])$$

für alle $i \in \mathbb{Z}^n$.

Beweis. Dies folgt aus 2.1.9, 2.2.7 und der Konstruktion von Ext durch projektive Auflösungen. $\square$

Wir definieren nun die Transponierte auf $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$, die grundlegend für das Studium fast zerfallender Folgen ist.

Definition 2.2.10. *Seien* $M \in \operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ *und*

$$P_1 \xrightarrow{f} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow (0)$$

eine minimale projektive Präsentierung von M *in* $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$. *Durch Anwendung von* $\operatorname{Hom}_\Lambda(-, \Lambda) \circ \mathfrak{F}$ *erhalten wir eine exakte Folge*

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(\mathfrak{F}(P_0), \Lambda) \xrightarrow{\mathfrak{F}(f)^*} \operatorname{Hom}_\Lambda(\mathfrak{F}(P_1), \Lambda) \longrightarrow \operatorname{coker}(\mathfrak{F}(f)^*) \longrightarrow (0)$$

graduierter Λ^{op}*-Moduln. Wir definieren* $\operatorname{Tr}_{\operatorname{gr}}(M) = \operatorname{coker}(\mathfrak{F}(f)^*)$. *Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der projektiven Auflösung. Der Modul* $\operatorname{Tr}_{\operatorname{gr}}(M)$ *heißt* ***Transponierte von*** M.

Mit der folgenden Proposition erhalten wir, dass beide Endstücke einer fast zerfallenden Folge in $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ graduierbar sind, wenn nur eines der Endstücke graduierbar ist.

Proposition 2.2.11. *(1) Ist* $M \in \operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$, *so gilt* $\mathfrak{F}(D\operatorname{Tr}_{\operatorname{gr}}(M)) \cong D\operatorname{Tr}(\mathfrak{F}(M))$.

(2) Ist $M \in \operatorname{mod} \Lambda$ graduierbar, so ist auch $D\operatorname{Tr}(M)$ graduierbar.

Beweis. (1) Aus der Definition der Transponierten auf $\operatorname{mod} \Lambda$ und 2.2.7 folgt, dass $\operatorname{Tr}(\mathfrak{F}(M)) \cong \mathfrak{F}(\operatorname{Tr}_{\mathrm{gr}}(M))$. Hieraus folgt die Behauptung, da D und $\mathfrak{F}$ kommutieren.

(2) Dies folgt direkt aus (1).

□

Der folgende Satz stellt sicher, dass wir eine gewisse Kontrolle über die verschiedenen Graduierungen auf unzerlegbaren Moduln haben. Er wird später verwendet, um zu zeigen, dass eine bestimmte Unterkategorie von $\operatorname{mod} \operatorname{gr} \Lambda$ nur endlich viele einfache Objekte hat. Dies wird ein wichtiger Schritt im Beweis des Existenzsatzes für fast zerfallende Folgen in $\operatorname{mod} \operatorname{gr} \Lambda$ sein.

Satz 2.2.12. *[6]*
Seien $M, N \in \operatorname{mod} \operatorname{gr} \Lambda$ unzerlegbare graduierte Λ-Moduln mit $\mathfrak{F}(M) \cong \mathfrak{F}(N)$. Dann existiert genau ein $i \in \mathbb{Z}^n$ mit $M \cong N[i]$.

Beweis. Nach 2.1.9 ist $\operatorname{Hom}_\Lambda(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{F}(N))$ ein graduierter Modul über der graduierten Algebra $\operatorname{End}_\Lambda(\mathfrak{F}(N))$. Da M, N unzerlegbar mit $\mathfrak{F}(M) \cong \mathfrak{F}(N)$ sind, ist $\operatorname{Hom}_\Lambda(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{F}(N))$ nach 2.2.4 ein lokaler $\operatorname{End}_\Lambda(\mathfrak{F}(N))$-Modul. Sei $f : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(N)$ ein Isomorphismus, d.h. $f \notin \operatorname{Rad}(\operatorname{Hom}_\Lambda(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{F}(N)))$. Dann existiert eine homogene Komponente $f_{-i} \in \operatorname{Hom}_\Lambda(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{F}(N))_{-i}$, die nicht im Radikal liegt. Dies gilt auch für $f_{-i} \circ f^{-1} \in \operatorname{End}_\Lambda(\mathfrak{F}(N))$. Da $\operatorname{End}_\Lambda(\mathfrak{F}(N))$ lokal ist, ist $f_{-i} \circ f^{-1}$ invertierbar und damit f_{-i} surjektiv. Wegen $\dim \mathfrak{F}(M) = \dim \mathfrak{F}(N) < \infty$ ist f_{-i} ein Isomorphismus und es folgt $M \cong N[i]$. Gilt zusätzlich $M \cong N[j]$ für ein $j \in \mathbb{Z}^n$, so folgt $N[j] \cong N[i]$ und damit $N \cong N[i-j]$. Damit existiert ein Isomorphismus $g \in \operatorname{End}_\Lambda(\mathfrak{F}(N))_{i-j}$. Da alle Elemente von $\operatorname{End}_\Lambda(\mathfrak{F}(N))_k$ für $k \neq 0$ nilpotent sind, folgt $i = j$. □

3 Fast zerfallende Folgen für $\mathbb{Z}^n$-graduierte Algebren

In diesem Kapitel beweisen wir die Existenz fast zerfallender Folgen in der Kategorie $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ für $\mathbb{Z}^n$-graduierte Algebren Λ. Die Kategorie $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ kann nicht zur Kategorie der endlich erzeugten Moduln über einer endlichdimensionalen Algebra äquivalent sein, da sie unendlich viele einfache Objekte besitzt: Ist nämlich $S \in \operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ einfach, so ist für jedes $i \in \mathbb{Z}^n$ auch $S[i]$ einfach und nicht isomorph zu S. Wir werden jedoch zeigen, dass eine passende volle Unterkategorie von $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ zu einer solchen Modulkategorie äquivalent ist. Dazu benötigen wir zunächst einige technische Hilfsmittel, die im folgenden Abschnitt bereitgestellt werden.

3.1 Die Kategorie der Morphismen einer abelschen Kategorie

Bei den folgenden Resultaten über abelsche Kategorien folgen wir dem Zugang aus [8] und beweisen sie in der dort dargestellten Allgemeinheit. Für die spätere Anwendung benötigen wir die Aussagen nur für Modulkategorien und bestimmte Unterkategorien. Wenn man sich nicht für den allgemeinen Fall interessiert, kann man Beweise und Konstruktionen in diesem Abschnitt teilweise vereinfachen und die Benutzung des nichttrivialen Satzes 1.1.11 vermeiden.

Definition 3.1.1. *Sei $\mathfrak{A}$ eine additive Kategorie. Die Kategorie* $\operatorname{Morph}(\mathfrak{A})$ *ist durch folgende Daten gegeben:*

- *Die Objekte entsprechen den Morphismen in $\mathfrak{A}$.*
- *Sind $d : M \to N$, $d' : M' \to N'$ Morphismen in $\mathfrak{A}$, so sind die Morphismen $d \to d'$ Paare (α, β), $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{A}}(M, M')$, $\beta \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{A}}(N, N')$, so dass das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{d} & N \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ M' & \xrightarrow{d'} & N' \end{array}$$

  kommutiert. Die Hintereinanderausführung ist durch Hintereinanderausführung der Komponenten definiert.

Die Kategorie $\mathrm{Morph}(\mathfrak{A})$ *heißt* ***Morphismenkategorie von*** $\mathfrak{A}$*.*

Ein Morphismus $(\alpha,\beta) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Morph}(\mathfrak{A})}(d,d')$ *heißt* ***nullhomotop****, wenn* $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(N,M')$ *mit* $\alpha = h \circ d$ *existiert.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[d, "\beta"] \arrow[dl, dotted, "h"] \\ M' \arrow[r, "d'"] & N' \end{tikzcd}$$

Die Menge der nullhomotopen Morphismen in $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Morph}(\mathfrak{A})}(d,d')$ *bildet eine Untergruppe, die wir mit* $\mathrm{Hom}_K(d,d')$ *bezeichnen. Auf diese Weise wird ein Ideal der Kategorie* $\mathrm{Morph}(\mathfrak{A})$ *definiert. Die zugehörige Quotientenkategorie bezeichnen wir mit* $K\mathfrak{A}$*.*

Sei $\mathfrak{A}$ eine abelsche Kategorie. Wir werden nachweisen, dass $\mathfrak{A}$ unter gewissen Umständen äquivalent zu $K\mathfrak{I}$ für eine volle Unterkategorie $\mathfrak{I}$ von $\mathfrak{A}$ ist, die aus injektiven Objekten von $\mathfrak{A}$ besteht.

Seien $M, M', N, N' \in \mathfrak{A}$, $d \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(M,N)$, $d' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(M',N')$ und $(\alpha,\beta) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Morph}(\mathfrak{A})}(d,d')$. Sind $i : \ker(d) \to M$ und $i' : \ker(d') \to M'$ die kanonischen Morphismen, so gilt $d' \circ \alpha \circ i = 0$. Aufgrund der universellen Eigenschaft des Kerns existiert also ein eindeutiger Morphismus $\alpha|_{\ker(d)} : \ker(d) \to \ker(d')$ mit $\alpha \circ i = i' \circ \alpha|_{\ker(d)}$. Wir definieren einen Funktor $\ker : \mathrm{Morph}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{A}$, indem wir jedem Objekt $d \in \mathrm{Morph}(\mathfrak{A})$ seinen Kern und jedem Morphismus $(\alpha,\beta) : d \to d'$ den induzierten Morphismus $\alpha|_{\ker(d)}$ zuordnen.

Lemma 3.1.2. *Sei* $\mathfrak{A}$ *eine abelsche Kategorie. Dann induziert* $\ker : \mathrm{Morph}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{A}$ *einen Funktor* $K\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$*, den wir ebenfalls mit* $\ker$ *bezeichnen.*

Beweis. Seien $d : M \to N$, $d' : M' \to N' \in K\mathfrak{A}$ sowie $(\alpha,\beta),(\alpha',\beta') \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Morph}(\mathfrak{A})}(d,d')$, so dass $(\alpha-\alpha',\beta-\beta')$ nullhomotop ist. Dann existiert ein Morphismus $h : N \to M'$ mit $\alpha - \alpha' = h \circ d$, also $\alpha = h \circ d + \alpha'$. Es folgt

$$i' \circ \alpha|_{\ker(d)} = \alpha \circ i = h \circ d \circ i + \alpha' \circ i = \alpha' \circ i = i' \circ \alpha'|_{\ker(d)}.$$

Aus der universellen Eigenschaft des Kerns folgt $\alpha|_{\ker(d)} = \alpha'|_{\ker(d)}$, wie zu zeigen war. □

Lemma 3.1.3. *Seien* $\mathfrak{A}$ *eine abelsche Kategorie und* $\mathfrak{I}$ *eine volle Unterkategorie von* $\mathfrak{A}$*, deren Objekte injektiv in* $\mathfrak{A}$ *sind. Zu jedem Objekt* $M \in \mathfrak{A}$ *existiere ein Objekt* $I \in \mathfrak{I}$ *mit einem Monomorphismus* $M \to I$*. Wir wählen zu jedem Objekt* $M \in \mathfrak{A}$ *eine exakte Folge*

$$(0) \longrightarrow M \xrightarrow{f_M} I_0 M \xrightarrow{g_M} I_1 M$$

wobei $I_0M, I_1M \in \mathfrak{I}$*. Zu jedem Morphismus* $u : M \to N$ *wählen wir Morphismen* u_0, u_1*, so dass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} (0) \arrow[r] & M \arrow[r, "f_M"] \arrow[d, "u"'] & I_0M \arrow[r, "g_M"] \arrow[d, "u_0"'] & I_1M \arrow[d, "u_1"'] \\ (0) \arrow[r] & N \arrow[r, "f_N"] & I_0N \arrow[r, "g_N"] & I_1N \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dann wird durch $S(M) = g_M$, $S(u) = (u_0, u_1)$ *ein Funktor* $S : \mathfrak{A} \to K\mathfrak{I}$ *definiert.*

Beweis. Wir zeigen, dass $(u_0, u_1) + \mathrm{Hom}_K(g_M, g_N)$ nicht von der Wahl von (u_0, u_1) abhängt, woraus sofort $S(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{S(M)}$ folgt. Sei (u_0', u_1') eine weitere Wahl von Morphismen. Mit dem Freyd-Mitchell-Einbettungssatz 1.1.11 dürfen wir annehmen, dass die beteiligten Objekte und Morphismen in einer vollen Unterkategorie von $\mathrm{Mod}\, R$, R ein Ring, liegen. Es gilt $u_0 \circ f_M = f_N \circ u = u_0' \circ f_M$, d.h. $(u_0 - u_0') \circ f_M = 0$ und $\ker(g_M) = \mathrm{im}\,(f_M) \subseteq \ker(u_0 - u_0')$. Wir definieren

$$h : \mathrm{im}\,(g_M) \to I_0N,\ x \mapsto (u_0 - u_0') \circ g_M^{-1}(x),$$

wobei $g_M^{-1}(x)$ die Wahl eines Urbildes für x bedeute. Seien $a, b \in I_0M$ mit $g_M(a) = g_M(b)$. Dann gilt $a - b \in \ker(g_M) \subseteq \ker(u_0 - u_0')$, also $(u_0 - u_0')(a) = (u_0 - u_0')(b)$. Damit ist h wohldefiniert. Es ist klar, dass h R-linear ist. Da die kanonische Abbildung $i : \mathrm{im}\,(f_M) \to I_1M$ ein Monomorphismus und I_0N injektiv ist, existiert ein Morphismus $\bar{h} : I_1M \to I_0N$ mit $i \circ \bar{h} = h$. Nach Konstruktion gilt $u_0 - u_0' = \bar{h} \circ g_M$. Damit ist $(u_0 - u_0', u_1 - u_1')$ nullhomotop und es folgt $(u_0, u_1) + \mathrm{Hom}_K(g_M, g_N) = (u_0', u_1') + \mathrm{Hom}_K(g_M, g_N)$.

Ist $N' \in \mathfrak{A}$ ein weiteres Objekt und $v : N \to N'$ ein Morphismus, so ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r] & M \arrow[r, "f_M"] \arrow[d, "v\circ u"'] & I_0M \arrow[r, "g_M"] \arrow[d, "v_0\circ u_0"'] & I_1M \arrow[d, "v_1\circ u_1"'] \\
(0) \arrow[r] & N' \arrow[r, "f_{N'}"] & I_0N' \arrow[r, "g_{N'}"] & I_1N'
\end{tikzcd}$$

kommutativ und obige Rechnung zeigt, dass $S(v \circ u) = (v_0 \circ u_0, v_1 \circ u_1) + \mathrm{Hom}_K(M, N') = S(v) \circ S(u)$. Damit ist S ein Funktor. □

Der folgende Satz ermöglicht es uns, das Studium einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven auf das Studium von genügend großen vollen Unterkategorien injektiver Objekte zurückzuführen.

Satz 3.1.4. *[8]*
Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{I}$ *wie in 3.1.3. Dann sind* $\ker : K\mathfrak{I} \to \mathfrak{A}$ *und* $S : \mathfrak{A} \to K\mathfrak{I}$ *zueinander pseudoinverse Äquivalenzen von Kategorien.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\ker \circ S \cong \mathrm{id}_{\mathfrak{A}}$. Für alle $M \in \mathfrak{A}$ ist wegen $S(M) = g_M$ und $\ker(g_M) = \mathrm{im}\,(f_M)$ der Morphismus $f_M : \ker \circ S(M) \to M$ ein Isomorphismus. Außerdem ist für jeden Morphismus $u : M \to N$ nach Definition das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f_M"] \arrow[d, "u"'] & \ker \circ S(M) \arrow[d, "\ker \circ S(u) = u_0|_{\mathrm{im}\,(f_M)}"] \\
N \arrow[r, "f_N"] & \ker \circ S(N)
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Also ist $(f_M)_{M \in \mathfrak{A}}$ eine natürliche Transformation und damit eine natürliche Äquivalenz $\ker \circ S \cong \mathrm{id}_{\mathfrak{A}}$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathrm{id}_{K\mathfrak{I}} \cong S \circ \ker$. Ist $u : I_0 \to I_1$ Objekt von $K\mathfrak{I}$, so erhalten wir ein kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r] & \ker(u) \arrow[r] \arrow[d, equal] & I_0 \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u_0"'] & I_1 \arrow[d, "u_1"'] \\
(0) \arrow[r] & \ker(u) \arrow[r] \arrow[d, equal] & I_0 \ker(u) \arrow[r, "g_{\ker(u)}"] \arrow[d, "u_0'"'] & I_1 \ker(u) \arrow[d, "u_1'"'] \\
(0) \arrow[r] & \ker(u) \arrow[r] & I_0 \arrow[r, "u"] & I_1 .
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Wir zeigen, dass $((u_0, u_1)+\mathrm{Hom}_K(u, g_{\ker(u)}))_{u\in K\mathfrak{I}}$ und $((u_0', u_1')+\mathrm{Hom}_K(g_{\ker(u)}, u))_{u\in K\mathfrak{I}}$ zueinander inverse natürliche Transformationen $\mathrm{id}_{K\mathfrak{I}} \to S \circ \ker$ und $S \circ \ker \to \mathrm{id}_{K\mathfrak{I}}$ definieren. Nach 1.1.11 dürfen wir annehmen, dass 3.1 ein kommutatives Diagramm in einer vollen Unterkategorie von $\mathrm{Mod}\, R$ für einen Ring R ist. Es ist zu zeigen, dass $(u_0' \circ u_0, u_1' \circ u_1) - (\mathrm{id}_{I_0}, \mathrm{id}_{I_1})$ nullhomotop ist. Wir definieren

$$h : \mathrm{im}\,(u) \to I_0, \quad x \mapsto (u_0' \circ u_0 - \mathrm{id}_{I_0}) \circ u^{-1}(x).$$

Seien $a, b \in I_0$ mit $u(a) = u(b)$, also $u(a-b) = 0$ und $a - b \in \ker(u)$. Aufgrund der Kommutativität von 3.1 folgt $u_0' \circ u_0(a-b) = a-b$ und wir erhalten $(u_0' \circ u_0 - \mathrm{id}_{I_0})(a) = (u_0' \circ u_0 - \mathrm{id}_{I_0})(b)$. Also ist h wohldefiniert. Aufgrund der Injektivität von I_0 existiert eine Fortsetzung $\bar{h} : I_1 \to I_0$ von h. Nach Konstruktion gilt $\bar{h} \circ u = u_0' \circ u_0 - \mathrm{id}_{I_0}$, also ist $(u_0' \circ u_0, u_1' \circ u_1) - (\mathrm{id}_{I_0}, \mathrm{id}_{I_1})$ nullhomotop. Ebenso zeigt man, dass $(u_0 \circ u_0', u_1 \circ u_1') - (\mathrm{id}_{I_0 \ker(u)}, \mathrm{id}_{I_1 \ker(u)})$ nullhomotop ist.

Sei $v : I_0' \to I_1'$ ein weiterer Morphismus in $\mathfrak{I}$ und $(\alpha, \beta) : u \to v$ Morphismus in $\mathrm{Morph}(\mathfrak{I})$. Sei (α', β') ein Repräsentant von $S \circ \ker(\alpha, \beta) + \mathrm{Hom}_K(u, v)$. Wir müssen zeigen, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "(u_0,u_1)"] \arrow[d, "(\alpha,\beta)"'] & g_{\ker(u)} \arrow[d, "(\alpha',\beta')"] \\
v \arrow[r, "(v_0,v_1)"] & g_{\ker(v)}
\end{tikzcd}$$

bis auf Nullhomotopie kommutiert, d.h. dass ein Morphismus $h : I_1 \to I_0 \ker(v)$ mit $h \circ u = \alpha' \circ u_0 - v_0 \circ \alpha$ existiert. Nach 1.1.11 dürfen wir annehmen, dass die auftretenden Objekte und Morphismen von $\mathfrak{A}$ in einer vollen Unterkategorie von $\mathrm{Mod}\, R$ für einen Ring R liegen. Nach Definition von (u_0, u_1), (v_0, v_1) sowie S und ker sind die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r] & \ker(u) \arrow[r] \arrow[d, equal] & I_0 \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u_0"'] & I_1 \arrow[d, "u_1"'] \\
(0) \arrow[r] & \ker(u) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha|_{\ker(u)}"'] & I_0 \ker(u) \arrow[r, "g_{\ker(u)}"] \arrow[d, "\alpha'"'] & I_1 \ker(u) \arrow[d, "\beta'"'] \\
(0) \arrow[r] & \ker(v) \arrow[r, "f_{\ker(v)}"] & I_0 \ker(v) \arrow[r, "g_{\ker(v)}"] & I_1 \ker(v)
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r] & \ker(u) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha|_{\ker(u)}"'] & I_0 \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\alpha"'] & I_1 \arrow[d, "\beta"'] \\
(0) \arrow[r] & \ker(v) \arrow[r] \arrow[d, equal] & I_0' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "v_0"'] & I_1' \arrow[d, "v_1"'] \\
(0) \arrow[r] & \ker(v) \arrow[r, "f_{\ker(v)}"] & I_0\ker(v) \arrow[r, "g_{\ker(v)}"] & I_1\ker(v)
\end{tikzcd}$$

kommutativ mit exakten Zeilen. Aus den Diagrammen liest man ab, dass

$$(\alpha' \circ u_0)|_{\ker(u)} = f_{\ker(v)} \circ \alpha|_{\ker(u)} = (v_0 \circ \alpha)|_{\ker(u)} \tag{3.2}$$

gilt. Wir definieren

$$h : \mathrm{im}\,(u) \to I_0\ker(v),\ x \mapsto (\alpha' \circ u_0 - v_0 \circ \alpha) \circ u^{-1}(x).$$

Seien $a, b \in I_0$ mit $u(a) = u(b)$, also $a - b \in \ker(u)$. Dann folgt mit 3.2, dass $(\alpha' \circ u_0 - v_0 \circ \alpha)(a) = (\alpha' \circ u_0 - v_0 \circ \alpha)(b)$. Damit ist h wohldefiniert. Da $I_0\ker(v)$ injektiv ist, existiert eine Fortsetzung $\bar{h} : I_1 \to I_0\ker(v)$ von h. Nach Konstruktion gilt $\bar{h} \circ u = \alpha' \circ u_0 - v_0 \circ \alpha$, wie zu zeigen war. Ebenso zeigt man, dass $((u_0', u_1') + \mathrm{Hom}_K(g_{\ker(u)}, u))_{u \in K\mathfrak{I}}$ eine natürliche Transformation ist.

Damit haben wir gezeigt, dass ker und S zueinander pseudo-inverse Äquivalenzen von Kategorien sind.

□

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{I}$ wie in 3.1.3 und $\mathfrak{B}$ eine weitere abelsche Kategorie. Jeder additive Funktor $F : \mathfrak{I} \to \mathfrak{B}$ induziert einen Funktor $KF : K\mathfrak{I} \to K\mathfrak{B}$ und durch Komposition erhalten wir einen Funktor

$$F' : \mathfrak{A} \xrightarrow{S} K\mathfrak{I} \xrightarrow{KF} K\mathfrak{B} \xrightarrow{\ker} \mathfrak{B}.$$

Ist umgekehrt $G : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ein additiver Funktor, so bezeichnen wir die Hintereinanderausführung von G mit dem Inklusionsfunktor $\mathfrak{I} \to \mathfrak{A}$ mit G'. Damit können wir zeigen, dass Funktoren zwischen abelschen Kategorien $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, die Äquivalenzen zwischen Unterkategorien injektiver Objekte wie in 3.1.3 induzieren, sogar Äquivalenzen zwischen den Kategorien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ induzieren.

Korollar 3.1.5. *Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ abelsche Kategorien, $\mathfrak{I}$ volle Unterkategorie von $\mathfrak{A}$ sowie $\mathfrak{J}$ volle Unterkategorie von $\mathfrak{B}$, so dass $\mathfrak{A}, \mathfrak{I}$ und $\mathfrak{B}, \mathfrak{J}$ jeweils die Voraussetzungen von 3.1.3 erfüllen. Sei $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ein additiver Funktor mit folgenden Eigenschaften:*

(1) Es gilt $F(I) \in \mathfrak{J}$ für alle $I \in \mathfrak{I}$.

(2) Der Funktor $F' : \mathfrak{I} \to \mathfrak{J}$ ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Dann ist $(F')' : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Ist F' eine Äquivalenz von Kategorien, so offensichtlich auch $KF' : K\mathfrak{I} \to K\mathfrak{J}$. Da $(F')'$ sich als

$$(F')' : \mathfrak{A} \xrightarrow{S} K\mathfrak{I} \xrightarrow{KF'} K\mathfrak{J} \xrightarrow{\ker} \mathfrak{B}$$

schreiben lässt und die Funktoren S und ker nach 3.1.4 Äquivalenzen von Kategorien sind, ist $(F')'$ eine Äquivalenz von Kategorien.

□

Mit etwas mehr Aufwand und Wissen über abelsche Kategorien, als wir hier voraussetzen möchten, lässt sich zeigen, dass $(F')' \cong R^0F$ der erste rechtsabgeleitete Funktor von F ist und damit $(F')' \cong F$ genau dann gilt, wenn F linksexakt ist. Für linksexaktes F, das die Voraussetzungen von 3.1.5 erfüllt, ist also F selbst eine Äquivalenz. Da wir diese Verschärfung in unserer Anwendung nicht benötigen, verweisen wir für Details auf [8] sowie [15].

Man kann eine zu 3.1.4 duale Aussage für Unterkategorien, die aus projektiven Objekten bestehen, beweisen. Dies wird in [3] für $\mathfrak{A} = \operatorname{mod}\Lambda$ durchgeführt, um Aussagen über die Transponierte auf $\operatorname{mod}\Lambda$ zu gewinnen und die Konstruktion der stabilen Kategorie zu motivieren.

3.2 Die Kategorie $\operatorname{mod}_J \operatorname{gr}\Lambda$

Sei Λ eine $\mathbb{Z}^n$-graduierte Algebra. In diesem Abschnitt definieren wir eine passende Unterkategorie von $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ und zeigen mit Hilfe von 3.1.5, dass sie äquivalent zur Kategorie der endlich erzeugten Moduln über einer endlichdimensionalen Algebra ist.

Definition 3.2.1. *Für eine nichtleere Teilmenge $J \subseteq \mathbb{Z}^n$ sei $\operatorname{mod}_J \operatorname{gr}\Lambda$ die volle Unterkategorie von $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ mit Objekten M, die $\operatorname{supp}(M) \subseteq J$ erfüllen.*

Es ist klar, dass $\operatorname{mod}_J \operatorname{gr}\Lambda$ jeweils eine abelsche Kategorie ist. Wir bestimmen nun für beliebiges $J \subseteq \mathbb{Z}^n$ die unzerlegbaren injektiven Objekte von $\operatorname{mod}_J \operatorname{gr}\Lambda$ und zeigen, dass $\operatorname{mod}_J \operatorname{gr}\Lambda$ genug injektive Objekte hat, um 3.1.4 anzuwenden.

Satz 3.2.2. *Sei $J \subseteq \mathbb{Z}^n$ und $S \in \operatorname{mod}_J \operatorname{gr}\Lambda$ einfach. Dann existiert ein bis auf Isomorphie eindeutiges dimensions- und inklusionsmaximales Objekt $I(S) \in \operatorname{mod}_J \operatorname{gr}\Lambda$ mit $\operatorname{Soc}(I(S)) = S$. Das Objekt $I(S)$ ist injektiv unzerlegbar und jedes injektiv unzerlegbare Objekt von $\operatorname{mod}_J \operatorname{gr}\Lambda$ hat diese Form für passendes S.*

Beweis. Sei I injektive Hülle von S in $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$. Nach 2.2.8 lässt sich jedes $M \in \operatorname{mod}_J \operatorname{gr}\Lambda$ mit $\operatorname{Soc}(M) = S$ in $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ in I einbetten. Jeder homogene Untermodul $(0) \neq N$ von I erfüllt $\operatorname{Soc}(N) = S$, also existiert $I(S)$ und ist bis auf Isomorphie eindeutig. Da $\operatorname{Soc}(I(S)) = S$ einfach ist, ist $I(S)$ unzerlegbar. Seien $M, N \in \operatorname{mod}_J \operatorname{gr}\Lambda$, $i : M \to N$ ein Monomorphismus und $f : M \to I(S)$ ein Morphismus. Nach Konstruktion von $I(S)$ dürfen wir $I(S) \subseteq I$ annehmen. Sei $i' : I(S) \to I$ die kanonische Inklusion. Da I injektiv in $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ ist, existiert ein Morphismus $g : N \to I$ mit $i' \circ f = g \circ i$. Wegen $\operatorname{supp}(N) \subseteq J$ gilt dann $\operatorname{supp}(\operatorname{im}(g)) \subseteq J$. Aus $\operatorname{Soc}(\operatorname{im}(g)) = S$ folgt aufgrund der

Maximalität von $I(S)$, dass $\mathrm{im}\,(g) \subseteq I(S)$. Damit lässt sich g als Morphismus $N \to I(S)$ in $\mathrm{mod}_J \operatorname{gr} \Lambda$ auffassen, also ist $I(S)$ injektiv in $\mathrm{mod}_J \operatorname{gr} \Lambda$.

Seien X irgendein injektiv unzerlegbares Objekt von $\mathrm{mod}_J \operatorname{gr} \Lambda$, S ein einfacher direkter Summand von $\mathrm{Soc}(X)$ sowie $i : S \to X$, $i' : S \to I(S)$ die kanonischen Inklusionen. Da X injektiv ist, existiert dann ein Morphismus $f : I(S) \to X$ mit $f \circ i' = i$. Da i injektiv ist, folgt

$$(0) = \ker(f) \cap \mathrm{im}\,(i') = \ker(f) \cap \mathrm{Soc}(I(S)),$$

also $\ker(f) = (0)$. Da $I(S)$ injektiv ist, ist dann $I(S)$ ein direkter Summand von X. Es folgt $X \cong I(S)$, da X unzerlegbar ist. □

Wir können nun zeigen, dass jedes Objekt von $\mathrm{mod}_J \operatorname{gr} \Lambda$ sich in ein injektives Objekt einbetten lässt.

Korollar 3.2.3. *Die Kategorie* $\mathrm{mod}_J \operatorname{gr} \Lambda$ *hat genug Injektive.*

Beweis. Seien $M \in \mathrm{mod}_J \operatorname{gr} \Lambda$ und $\mathrm{Soc}(M) = \bigoplus_{i=1}^m S_i$ eine Zerlegung von $\mathrm{Soc}(M)$ in einfache Summanden. Sei $I'(S_i)$ jeweils injektive Hülle von S_i in $\mathrm{mod} \operatorname{gr} \Lambda$ mit $I(S_i) \subseteq I'(S_i)$, wobei $I(S_i)$ wie in 3.2.2 definiert sei. Dann ist $\bigoplus_{i=1}^m I'(S_i)$ injektive Hülle von M in $\mathrm{mod} \operatorname{gr} \Lambda$. Wir dürfen annehmen, dass $M \subseteq \bigoplus_{i=1}^m I'(S_i)$. Sei $x = \sum_{i=1}^m x_i \in M$ mit $x_i \in I'(S_i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$. Sei $i \in \{1, \ldots, m\}$. Dann gilt wegen $\mathrm{supp}(M) \subseteq J$ und der Maximalität von $I(S_i)$, dass $x_i \in I(S_i)$. Also gilt $M \subseteq \bigoplus_{i=1}^m I(S_i)$.
□

Sei $J \subseteq \mathbb{Z}^n$ endlich. Dann hat $\mathrm{mod}_J \operatorname{gr} \Lambda$ nach 2.2.5 und 2.2.12 nur endlich viele einfache Objekte, da $\mathrm{mod}\,\Lambda$ nur endlich viele einfache Objekte hat. Nach 3.2.2 hat $\mathrm{mod}_J \operatorname{gr} \Lambda$ also nur endlich viele unzerlegbare injektive Objekte. Sei $I_1, \ldots, I_m$ ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen unzerlegbarer injektiver Objekte in $\mathrm{mod}_J \operatorname{gr} \Lambda$ und $I = \bigoplus_{i=1}^m I_i$. Sei $\mathfrak{I}$ die volle Unterkategorie von $\mathrm{mod}_J \operatorname{gr} \Lambda$ mit Objekten $\{\bigoplus_{i=1}^k I | k \in \mathbb{N}\}$. Nach 3.2.3 erfüllen $\mathrm{mod}_J \operatorname{gr} \Lambda$ und $\mathfrak{I}$ dann die Voraussetzungen von 3.1.4. Seien $\Gamma = \mathrm{End}_{\operatorname{gr}\Lambda}(I)$, $F = \mathrm{Hom}_{\operatorname{gr}\Lambda}(-, I)$ und $\mathfrak{J}$ die volle Unterkategorie von $\mathrm{mod}\,\Gamma$ mit Objekten $\{F(M) | M \in \mathfrak{I}\}$. Dann ist $F : \mathrm{mod}_J \operatorname{gr} \Lambda \to \mathrm{mod}\,\Gamma$ ein kontravarianter Funktor und $F|_{\mathfrak{I}} : \mathfrak{I} \to \mathfrak{J}$ dicht. Da F mit endlichen direkten Summen vertauscht und $F(I) = \Gamma$ projektiv ist, sind die Objekte von $\mathfrak{J}$ projektiv in $\mathrm{mod}\,\Gamma$ und für jedes $X \in \mathrm{mod}\,\Gamma$ existieren ein Objekt $P \in \mathfrak{J}$ und ein Epimorphismus $P \to X$.

Proposition 3.2.4. *Der Funktor* $F|_{\mathfrak{I}}$ *definiert eine Dualität* $\mathfrak{I} \to \mathfrak{J}$.

Beweis. Da F dicht ist, genügt es zu zeigen, dass für alle $M, N \in \mathfrak{I}$ die induzierte lineare Abbildung $F : \mathrm{Hom}_{\operatorname{gr}\Lambda}(M, N) \to \mathrm{Hom}_\Gamma(F(N), F(M))$ ein Isomorphismus ist. Sei $f \in \ker(F)$. Dann gilt für alle $g \in F(N) = \mathrm{Hom}_{\operatorname{gr}\Lambda}(N, I)$, dass $g \circ f = 0$. Sei $N = \bigoplus_{i=1}^k I$ und π_i die i-te Projektion. Dann gilt $\pi_i \circ f = 0$, also $\mathrm{im}\,(f) \subseteq \bigcap_{i=1}^k \ker(\pi_i) = (0)$. Es folgt $f = 0$, also ist F injektiv.

Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Gamma(F(N), F(M))$. Nach Definition gilt $\varphi(\pi_i) \in \mathrm{Hom}_{\operatorname{gr}\Lambda}(M, I)$ und für $f := \begin{pmatrix} \varphi(\pi_1) \\ \vdots \\ \varphi(\pi_k) \end{pmatrix}$ folgt $f \in \mathrm{Hom}_{\operatorname{gr}\Lambda}(M, N)$. Für alle $g = \begin{pmatrix} g_1 & \ldots & g_k \end{pmatrix} \in F(N)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\varphi(g) &= \varphi(\sum_{i=1}^{k} g_i \circ \pi_i) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(g_i \circ \pi_i) = \sum_{i=1}^{k} g_i \circ \varphi(\pi_i) \\ &= \begin{pmatrix} g_1 & \dots & g_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(\pi_1) \\ \vdots \\ \varphi(\pi_k) \end{pmatrix} = g \circ f \\ &= F(f)(g).\end{aligned}$$

Damit gilt $\varphi = F(f)$, also ist F surjektiv. □

Wir sind nun in der Lage, den Hauptsatz dieses Abschnitts zu beweisen.

Satz 3.2.5. *Die Kategorien* $\operatorname{mod}_J \operatorname{gr} \Lambda$ *und* $\operatorname{mod} \Gamma^{op}$ *sind äquivalent.*

Beweis. Sei $D : \operatorname{mod} \Gamma \to \operatorname{mod} \Gamma^{op}$ die Standarddualität und $\mathfrak{J}'$ die volle Unterkategorie von $\operatorname{mod} \Gamma^{op}$ mit Objekten $\{D(M) | M \in \mathfrak{J}\}$. Dann erfüllen $\operatorname{mod} \Gamma^{op}$ und $\mathfrak{J}'$ die Voraussetzungen von 3.1.4, weil D eine Dualität ist und $\mathfrak{J}$ aus projektiven Objekten von $\operatorname{mod} \Gamma$ besteht, so dass zu jedem $X \in \operatorname{mod} \Gamma$ ein Objekt $P \in \mathfrak{J}$ und ein Epimorphismus $P \to X$ existiert. Da die Hintereinanderausführung zweier Dualitäten eine Äquivalenz von Kategorien ist, definiert $D \circ F$ nach 3.2.4 eine Äquivalenz $\mathfrak{J} \to \mathfrak{J}'$. Damit haben wir nach 3.1.5 eine Äquivalenz $\operatorname{mod}_J \operatorname{gr} \Lambda \to \operatorname{mod} \Gamma^{op}$. □

Da $D \circ \operatorname{Hom}_{\operatorname{gr}\Lambda}(-, I)$ linksexakt ist, ergeben die Bemerkungen nach 3.1.5, dass die Äquivalenz aus 3.2.5 durch $D \circ \operatorname{Hom}_{\operatorname{gr}\Lambda}(-, I)$ gegeben ist. Die genaue Form der Äquivalenz ist für den Beweis des Existenzsatzes im nächsten Abschnitt jedoch nicht von Belang.

3.3 Der Existenzsatz

Sei Λ eine $\mathbb{Z}^n$-graduierte Algebra. In diesem Abschnitt beweisen wir die Existenz von fast zerfallenden Folgen in $\operatorname{mod} \operatorname{gr} \Lambda$. Für einen nichtinjektiven Modul $X \in \operatorname{mod}_J \operatorname{gr} \Lambda$ wenden wir dazu 3.2.5 mit einer passenden Menge J an, um eine fast zerfallende Folge in $\operatorname{mod}_J \operatorname{gr} \Lambda$ zu finden, die in X startet. Diese vergleichen wir mit einer fast zerfallenden Folge in $\operatorname{mod} \Lambda$ und zeigen, dass diese Folgen isomorph sind.

Für viele Wahlen von J unterscheidet sich die Struktur von $\operatorname{mod}_J \operatorname{gr} \Lambda$ jedoch zu stark von der Struktur von $\operatorname{mod} \operatorname{gr} \Lambda$, als dass die Äquivalenz aus 3.2.5 von Nutzen ist. Dazu zeigen wir ein Beispiel.

Beispiel. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $\Lambda = k[X]/(X^n)$. Dann ist Λ selbstinjektiv und der reguläre Modul Λ ist das einzige unzerlegbare projektiv-injektive Objekt in $\operatorname{mod} \Lambda$. Da (X^n) ein homogenes Ideal der $\mathbb{Z}$-graduierten Algebra $k[X]$ ist, ist Λ nach 2.1.4 eine $\mathbb{Z}$-graduierte Algebra. Es sei $x = X + (X^n)$. Dann ist $S = (x^{n-1})$ ein einfacher, graduierter Λ-Modul mit $\operatorname{supp}(S) = n - 1$, der nicht injektiv ist. Bekanntlich bilden die Untermoduln von Λ eine Kette und die Glieder dieser Kette sind die einzigen unzerlegbaren Objekte in $\operatorname{mod}\Lambda$. Daraus folgt, dass die graduierten Moduln $M = S[i]$, $i \in \mathbb{Z}$, die einzigen graduierten unzerlegbaren Moduln M mit $|\operatorname{supp}(M)| = 1$ sind. Sei $J = \operatorname{supp}(S)$. Dann haben alle Objekte in $\operatorname{mod}_J \operatorname{gr}\Lambda$ die Form $\bigoplus_{i=1}^{m} S$ für passendes $m \in \mathbb{N}_0$. Nach 3.2.2 ist S injektiv in $\operatorname{mod}_J \operatorname{gr}\Lambda$, also sind alle Objekte von $\operatorname{mod}_J \operatorname{gr}\Lambda$ injektiv und jede exakte Folge in $\operatorname{mod}_J \operatorname{gr}\Lambda$ zerfällt. Es gibt also überhaupt keine fast zerfallenden Folgen in $\operatorname{mod}_J \operatorname{gr}\Lambda$. Außerdem gilt $\operatorname{Tr}_J D(S) = (0) \neq \operatorname{Tr}_{\operatorname{gr}} D(S)$, wobei $\operatorname{Tr}_J D(S)$ das von der Äquivalenz $\operatorname{mod}_J \operatorname{gr}\Lambda \to \operatorname{mod}\Gamma$ aus 3.2.5 und der Transponierten auf $\operatorname{mod}\Gamma$ induzierte Objekt sei. Das Beispiel zeigt, dass die Hauptschwierigkeit im Beweis des Existenzsatzes in der geschickten Wahl von J liegt.

Wir benötigen das folgende einfache Lemma.

Lemma 3.3.1. *Seien $M, N \in \operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$. Dann gilt* $\operatorname{supp}(\operatorname{Hom}_\Lambda(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{F}(N))) \subseteq \operatorname{supp}(N) - \operatorname{supp}(M)$.

Beweis. Seien $i \in \operatorname{supp}(\operatorname{Hom}_\Lambda(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{F}(N)))$ und $f \in \operatorname{Hom}_\Lambda(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{F}(N))_i$ mit $f \neq 0$. Wegen $f(M_j) \subseteq f(N_{j+i})$ für alle $j \in \mathbb{Z}^n$ existiert dann ein $k \in \operatorname{supp}(M)$ mit $k + i \in \operatorname{supp}(N)$. Damit gilt $i \in \operatorname{supp}(N) - \operatorname{supp}(M)$. □

Um den Hauptsatz dieser Arbeit zu beweisen, zeigen wir zunächst, dass der Mittelteil jeder fast zerfallenden Folge in $\operatorname{mod}\Lambda$ graduierbar ist, falls einer der beiden Endteile graduierbar ist.

Proposition 3.3.2. *Sei $(0) \to N \to E \to M \to (0)$ eine fast zerfallende Folge in $\operatorname{mod}\Lambda$. Ist dann M oder N graduierbar, so auch E.*

Beweis. Nach 2.2.11 sind M und N graduierbar, wenn nur einer der beiden Moduln graduierbar ist. Sei $X \in \operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ mit $\mathfrak{F}(X) \cong N$. Wegen $M \cong \operatorname{Tr}D(N)$ folgt dann aus 2.2.11 für $Z = \operatorname{Tr}_{\operatorname{gr}} D(X)$, dass $\mathfrak{F}(Z) \cong M$ gilt. Da die Folge nicht zerfällt, gilt nach 2.2.9 und 1.1.10

$$(0) \neq \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\mathfrak{F}(Z), \mathfrak{F}(X)) \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}^n} \operatorname{Ext}^1_\Lambda(\mathfrak{F}(Z), \mathfrak{F}(X))_i \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}^n} \operatorname{Ext}^1_{\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda}(Z[i], X).$$

Damit gilt $\operatorname{Ext}^1_{\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda}(Z[i_0], X) \neq (0)$ für passendes $i_0 \in \mathbb{Z}^n$, also ist für jede Menge $J \subseteq \mathbb{Z}^n$ mit $J' := \operatorname{supp}(X) \cup \operatorname{supp}(Z[i_0]) \subseteq J$ auch $X \in \operatorname{mod}_J \operatorname{gr}\Lambda$ nicht injektiv. Sei $(0) \to X \to I_0 \to I_1$ eine minimale injektive Kopräsentierung von X in $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$. Sei P projektive Decke von $\operatorname{Soc}(I_1)$ in $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$. Wir definieren

$$J = J' \cup \operatorname{supp}(I_0) \cup \operatorname{supp}(I_1) \cup (\operatorname{supp}(P) - \operatorname{supp}(Z) + \operatorname{supp}(Z)).$$

Dann ist X nicht injektiv in $\operatorname{mod}_J \operatorname{gr}\Lambda$. Nach 3.2.5 existiert eine endlichdimensionale Algebra Ω zusammen mit einer Äquivalenz $H : \operatorname{mod}_J \operatorname{gr}\Lambda \to \operatorname{mod}\Omega$ und nach 1.2.3 hat die Kategorie $\operatorname{mod}\Omega$ fast zerfallende Folgen. Also existiert eine fast zerfallende Folge

$$(0) \longrightarrow X \xrightarrow{\ i\ } Y \xrightarrow{\ p\ } X' \longrightarrow (0) \tag{3.3}$$

in $\mathrm{mod}_J\,\mathrm{gr}\,\Lambda$. Da die Folge nicht zerfällt, erhalten wir ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} (0) & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & \mathfrak{F}(Z) & \longrightarrow & (0) \\ & & \Vert & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \\ (0) & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\mathfrak{F}(i)} & \mathfrak{F}(Y) & \xrightarrow{\mathfrak{F}(p)} & \mathfrak{F}(X') & \longrightarrow & (0) \end{array}$$

in $\mathrm{mod}\,\Lambda$. Sei $\mu = \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} \mu_j$ eine Zerlegung von μ in homogene Komponenten. Sei $j \in \mathbb{Z}^n$ mit $\mu_j \neq 0$. Wir zeigen, dass $\mu_j : Z[j] \to X'$ Morphismus in $\mathrm{mod}_J\,\mathrm{gr}\,\Lambda$ ist. Nach Definition von J genügt es zu zeigen, dass $j \in \mathrm{supp}(P) - \mathrm{supp}(Z)$. Da die Folge 3.3 von einer fast zerfallenden Folge in $\mathrm{mod}\,\Omega$ kommt, gilt $H(X') \cong \mathrm{Tr}D(H(X))$. Außerdem ist nach Definition von J, I_0 und I_1 die Folge $(0) \to X \to I_0 \to I_1$ eine minimale injektive Kopräsentierung von X in $\mathrm{mod}_J\,\mathrm{gr}\,\Lambda$, also ist $(0) \to H(X) \to H(I_0) \to H(I_1)$ eine minimale injektive Kopräsentierung von X in $\mathrm{mod}\,\Omega$. Mit 1.2.6 folgt, dass

$$H(\mathrm{Top}(X')) \cong \mathrm{Top}(H(X')) \cong \mathrm{Soc}(H(I_1)) \cong H(\mathrm{Soc}(I_1)).$$

Es ergibt sich $\mathrm{Top}(X') \cong \mathrm{Soc}(I_1)$, also ist P auch projektive Decke von X' in $\mathrm{mod}\,\mathrm{gr}\,\Lambda$. Wir erhalten $\mathrm{supp}(X') \subseteq \mathrm{supp}(P)$ und mit 3.3.1 folgt $j \in \mathrm{supp}(P) - \mathrm{supp}(Z)$.

Angenommen, es existiert kein $j \in \mathbb{Z}^n$, so dass μ_j ein zerfallender Epimorphismus ist. Da 3.3 eine fast zerfallende Folge in $\mathrm{mod}_J\,\mathrm{gr}\,\Lambda$ ist, existiert dann für jedes j ein graduierter Morphismus $\gamma_j : Z[j] \to Y$ mit $\mu_j = \mathfrak{F}(p) \circ \gamma_j$. Dann gilt mit $\gamma = \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} \gamma_j$, dass $\mu = \mathfrak{F}(p) \circ \gamma$. Es folgt

$$\mathfrak{F}(p) \circ \lambda = \mu \circ g = \mathfrak{F}(p) \circ \gamma \circ g,$$

also gilt $\mathrm{im}\,(\lambda - \gamma \circ g) \subseteq \ker(\mathfrak{F}(p)) = \mathrm{im}\,(\mathfrak{F}(i))$. Da $\mathfrak{F}(i)$ ein Monomorphismus ist, ist dann

$$h : E \to N,\ x \to \mathfrak{F}(i)^{-1} \circ (\lambda - \gamma \circ g)(x)$$

wohldefiniert. Es ist klar, dass h eine Λ-lineare Abbildung ist. Für alle $x \in N$ gilt

$$\begin{aligned} h \circ f(x) &= \mathfrak{F}(i)^{-1} \circ (\lambda \circ f - \gamma \circ g \circ f)(x) \\ &= \mathfrak{F}(i)^{-1} \circ \lambda \circ f(x) \\ &= \mathfrak{F}(i)^{-1} \circ \mathfrak{F}(i)(x) \\ &= x, \end{aligned}$$

also gilt $h \circ f = \mathrm{id}_N$ und f ist ein zerfallender Monomorphismus, was einen Widerspruch darstellt.

Also gibt es ein $j \in \mathbb{Z}^n$, so dass μ_j zerfallender Epimorphismus ist, d.h. $\mathfrak{F}(X')$ ist direkter Summand von $\mathfrak{F}(Z)$. Da $\mathfrak{F}(Z)$ unzerlegbar ist, ist μ_j ein Isomorphismus und insbesondere $\dim Z = \dim X'$. Es folgt $Z[j] \cong X'$ und $\mu_j^{-1} \circ \mu \in \mathrm{End}_\Lambda(\mathfrak{F}(Z), \mathfrak{F}(Z))$ ist Summe einer Einheit und nilpotenter Elemente, also ein Automorphismus. Damit ist μ injektiv, also ein Isomorphismus. Nach 1.1.12 ist dann auch λ ein Isomorphismus, also E graduierbar. $\square$

Satz 3.3.3. *(Existenzsatz für fast zerfallende Folgen in* $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$*)*
Sei Λ *eine* $\mathbb{Z}^n$*-graduierte Algebra. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) Die Kategorie $\operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ *hat fast zerfallende Folgen.*

(2) Der Vergissfunktor $\mathfrak{F}$ *bildet fast zerfallende Folgen auf ebensolche ab.*

Beweis. (1) Sei $M \in \operatorname{mod}\operatorname{gr}\Lambda$ unzerlegbar und nicht projektiv. Nach dem Beweis von 3.3.2 existiert eine exakte Folge

$$(0) \longrightarrow N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} M \longrightarrow (0) \tag{3.4}$$

mit der Eigenschaft, dass

$$(0) \longrightarrow \mathfrak{F}(N) \xrightarrow{\mathfrak{F}(i)} \mathfrak{F}(E) \xrightarrow{\mathfrak{F}(p)} \mathfrak{F}(M) \longrightarrow (0)$$

fast zerfallend in $\operatorname{mod}\Lambda$ ist.

Sei $f \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{gr}\Lambda}(X, M)$ kein zerfallender Epimorphismus. Dann ist nach 2.1.14 auch $\mathfrak{F}(f)$ kein zerfallender Epimorphismus, also existiert ein Morphismus $g \in \operatorname{Hom}_\Lambda(\mathfrak{F}(X), \mathfrak{F}(E))$ mit $\mathfrak{F}(p) \circ g = \mathfrak{F}(f)$. Indem wir g in homogene Komponenten zerlegen und einen Koeffizientenvergleich durchführen, erhalten wir $\mathfrak{F}(p) \circ g_0 = \mathfrak{F}(f)$. Es folgt $\mathfrak{F}(p \circ g_0) = \mathfrak{F}(f)$. Da $\mathfrak{F}$ treu ist, gilt $f = p \circ g_0$, also ist p rechts fast zerfallend. Ebenso zeigt man, dass i links fast zerfallend ist. Damit ist die Folge 3.4 fast zerfallend.

(2) Dies folgt direkt aus dem Beweis von (1).

□

Literatur

[1] Eiichi Abe. *Hopf Algebras*. Cambridge Tracts in Mathematics 74. Cambridge University Press, 1980.

[2] Ibrahim Assem, Daniel Simson und Andrzej Skowronski. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Vol. 1: Techniques of Representation Theory*. London Mathematical Society Student Texts 65. Cambridge University Press, 2006.

[3] Maurice Auslander, Idun Reiten und Sverre O. Smalo. *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36. Cambridge University Press, 1997.

[4] Yu. A. Drozd und V.V. Kirichenko. *Finite Dimensional Algebras*. Springer-Verlag, 1994.

[5] Rolf Farnsteiner. »Group-graded algebras, extensions of infinitesimal groups, and applications«. In: *Transform. Groups* 14 (2009), S. 127–162.

[6] Rolf Farnsteiner. *Support Varieties, AR-Components and Good Filtrations*. 2007.

[7] Peter Freyd. *Abelian Categories*. New York: Harper & Row, 1964.

[8] Pierre Gabriel. »Des catégories abèliennes«. In: *Bulletin de la S.M.F.* 90 (1962), S. 332–448.

[9] Robert Gordon und Edward L. Green. »Graded Artin Algebras«. In: *Journal of Algebra* 76 (1982), S. 111–137.

[10] Robert Gordon und Edward L. Green. »Representation Theory of Graded Artin Algebras«. In: *Journal of Algebra* 76 (1982), S. 138–152.

[11] Christine U. Munstermann. *Auslander-Reiten-Theorie für graduierte Algebren*. Staatsexamensarbeit, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel. 2010.

[12] T.A. Springer. *Linear Algebraic Groups*. Second Edition. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser, 1998.

[13] Helmut Strade und Rolf Farnsteiner. *Modular Lie Algebras and their Representations*. Pure and Applied Mathematics 116. Marcel Dekker, 1988.

[14] William C. Waterhouse. *Introduction to Affine Group Schemes*. Graduate Texts in Mathematics 66. Springer-Verlag, 1979.

[15] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1994.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Weiterhin versichere ich, dass diese Arbeit noch nicht als Abschlussarbeit an anderer Stelle vorgelegen hat.

Datum, Unterschrift