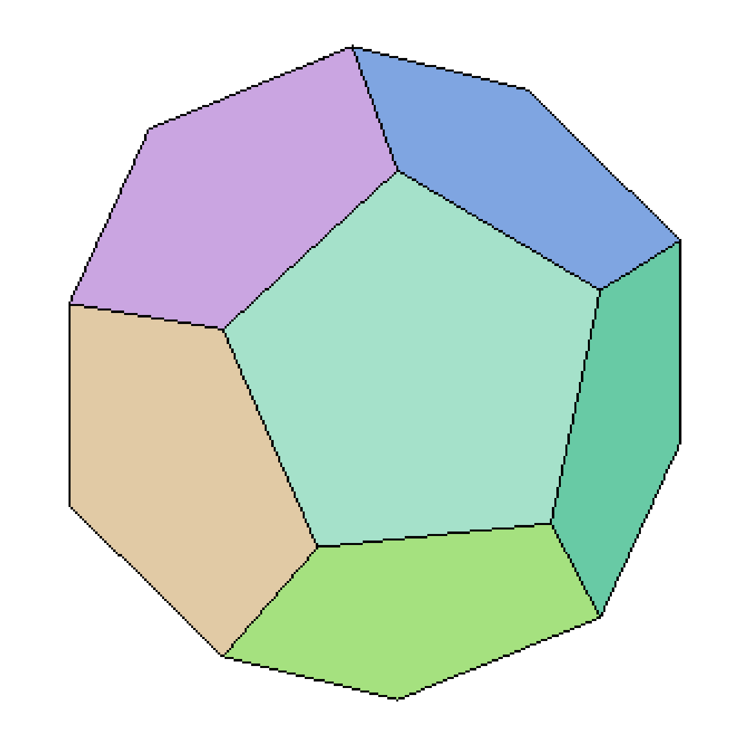


C A U

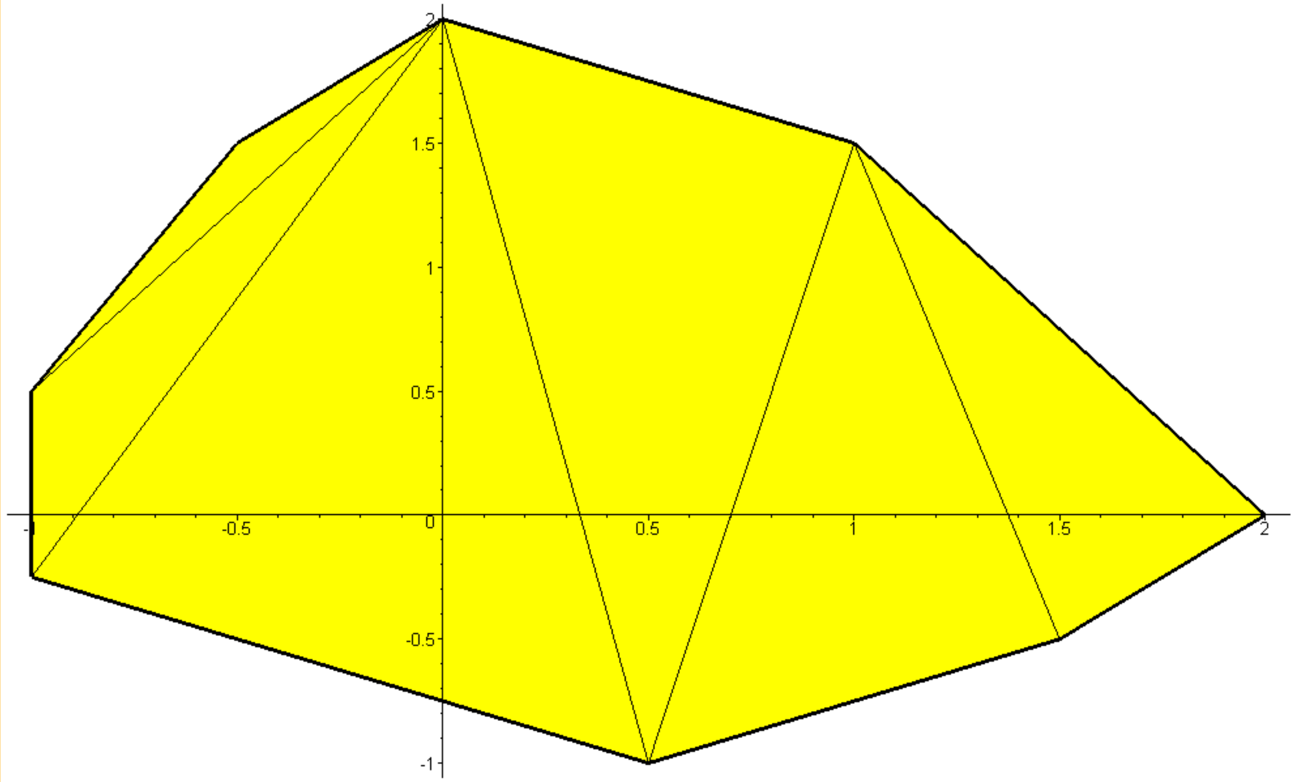
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Hermann König, Mathematisches Seminar

Studieninformationstage an der Universität Kiel

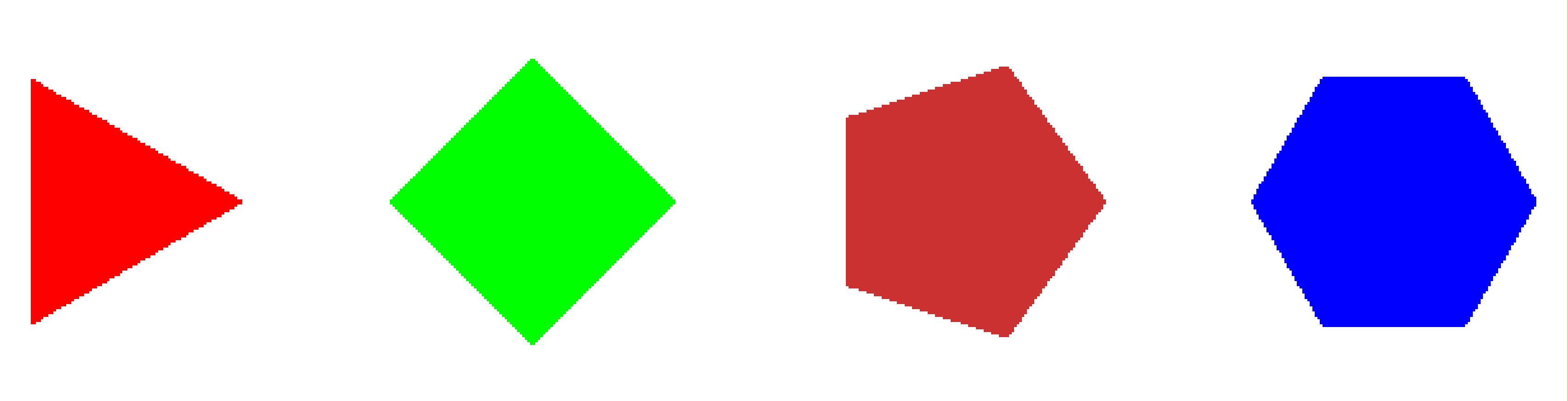
Über die regelmäßigen Platonischen Körper

Winkelsumme im n-Eck



Zerlegung eines ebenen n-Ecks in (n-2) Dreiecke, oben für n=8. Die Summe der Innenwinkel im n-Eck ist also (n-2)*180° . Jeder der n Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks hat also den Wert (n-2)/n*180°.

Regelmäßige n-Ecke



Die Innenwinkel bei regelmäßigen n-Ecken sind (n-2)/n*180° .

Also für n=3 : 60° , n=4 : 90° , n=5 : 108° , n=6 : 120° .

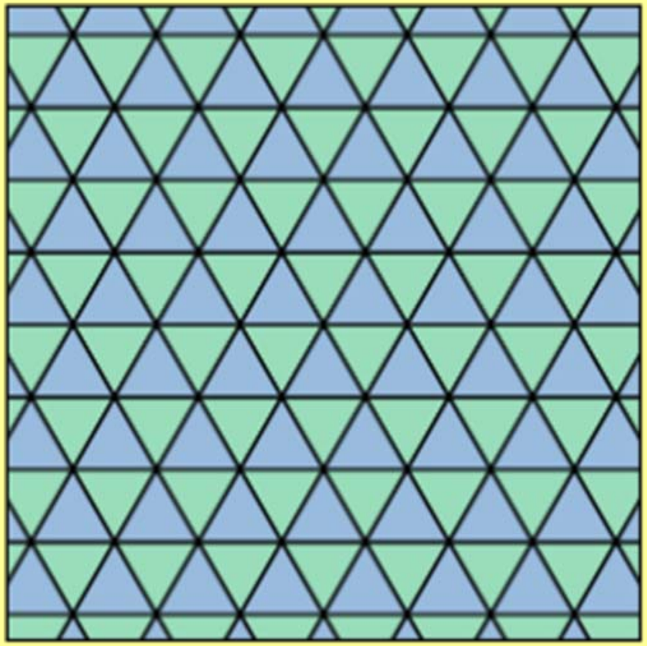
Der Vollwinkel von 360° ist durch 60°, 90°, 120° teilbar,

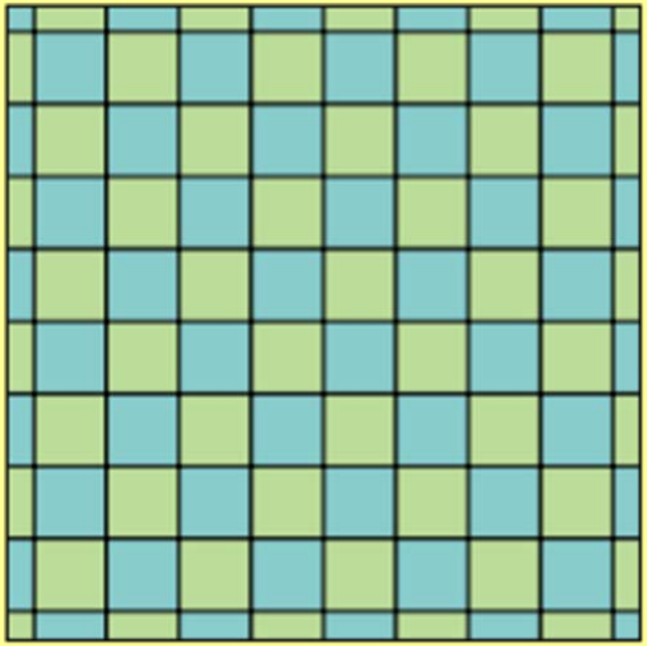
nicht durch 108° . Man kann die Ebene also disjunkt mit

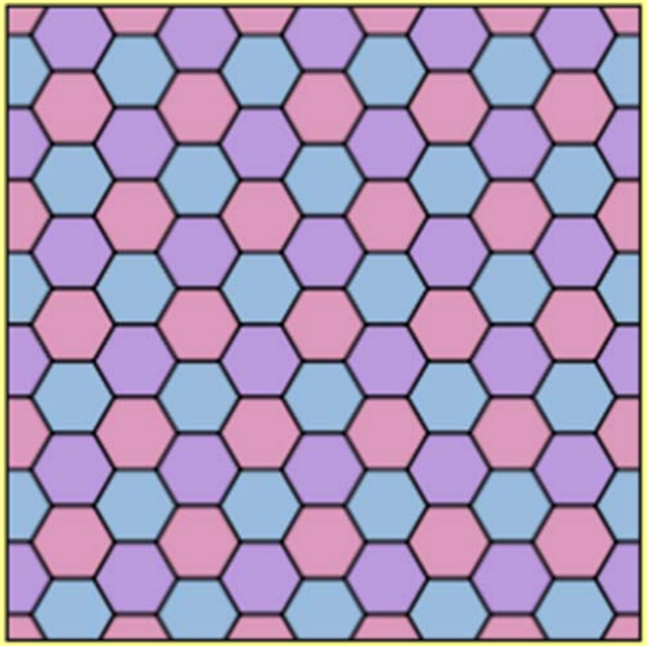
Dreiecken, Vierecken oder Sechsecken parkettieren, aber nicht

mit Fünfecken.

Parkettierungen der Ebene mit regelmäßigen n-Ecken







Regelmäßige Fünfecke

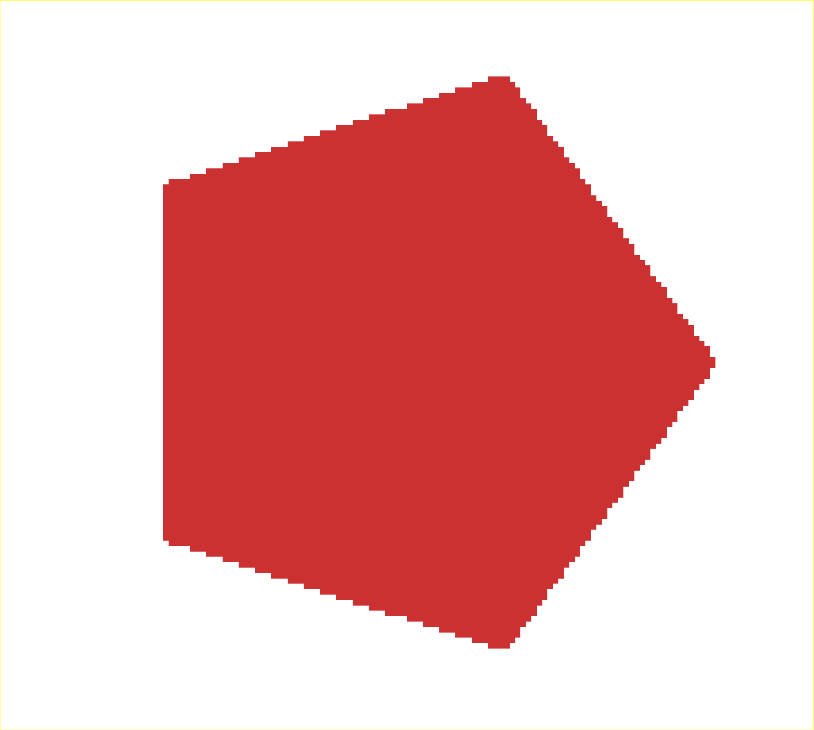
Regelmäßige Fünfecke der Seitenlänge 1 haben Diagonalen der Länge

$$x = (\sqrt{5} + 1) / 2 \sim 1.618 .$$

Man kann nämlich mittels des Strahlensatzes zeigen, dass die Diagonalenlänge x die quadratische Gleichung

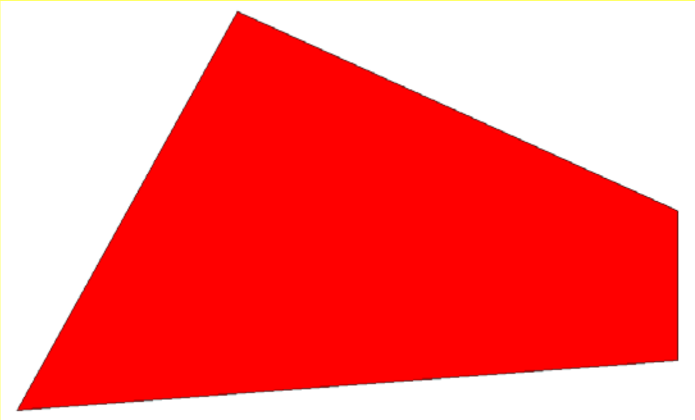
$$x^2 - x - 1 = 0$$

erfüllt. Diese Gleichung hat eine negative und die obige positive Lösung.

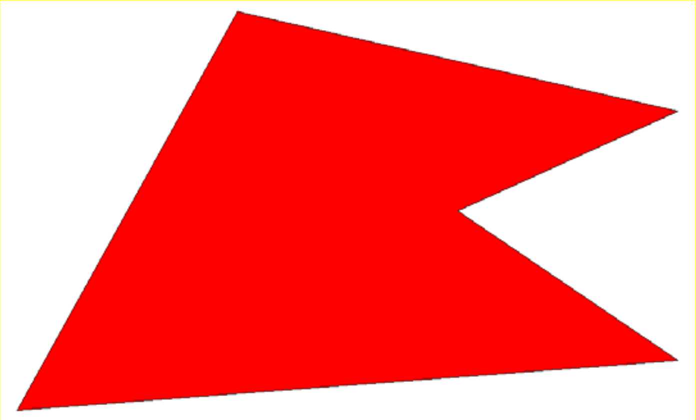


Konvexe Mengen

Eine Punktmenge in der Ebene oder im Raum ist **konvex**, wenn sie mit jeweils zwei Punkten auch deren gesamte Verbindungsgerade enthält. Die **konvexe Hülle** einer Punktmenge ist die kleinste konvexe Menge, die diese Punkte enthält. Vorstellung: Gummihaut um die Punkte legen: in der Ebene oder auch im Raum.

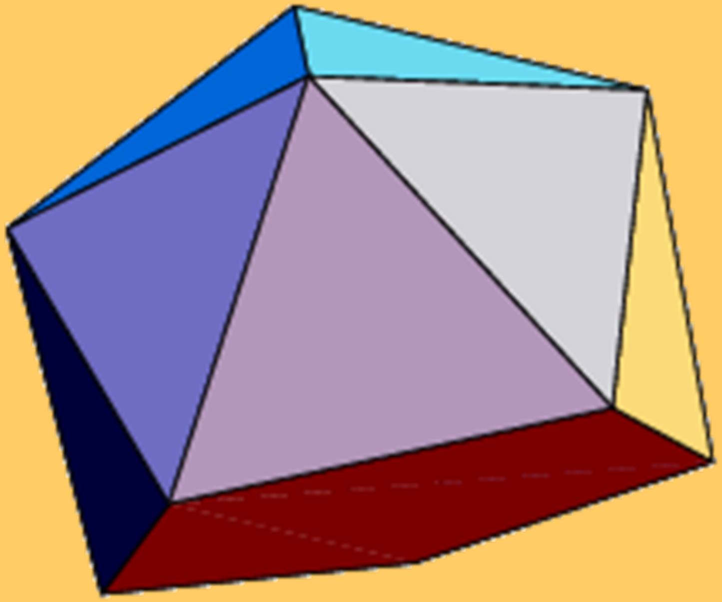


konvex



nicht konvex

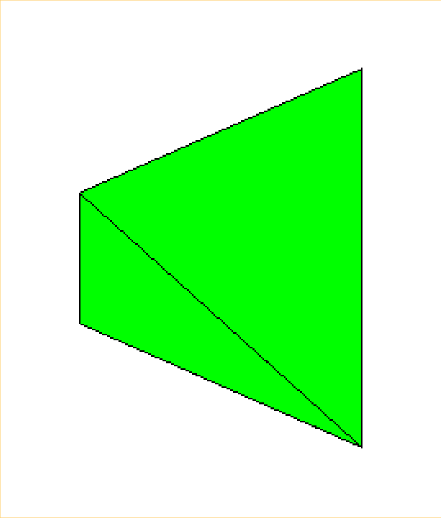
Polyeder



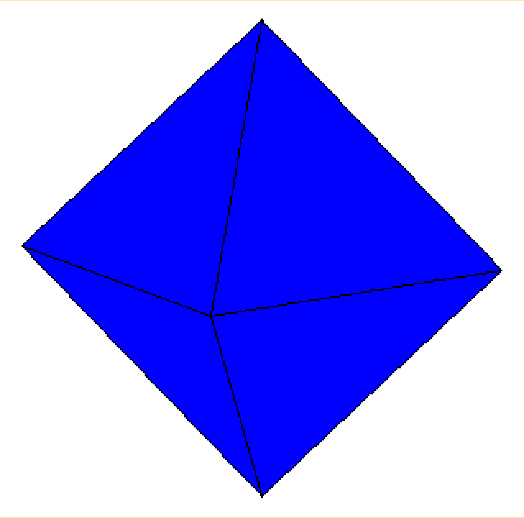
Ein **(konvexes) Polyeder** ist die konvexe Hülle endlich vieler Punkte im (dreidimensionalen) Raum mit nichtleerem Inneren. Ein Polyeder wird von ebenen Seitenflächen begrenzt, die konvexe n-Ecke für verschiedene Zahlen n sind und in den Ecken des Polyeders zusammenstoßen. Zwei benachbarte Ecken sind durch eine Kante verbunden, zwei benachbarte Flächen stoßen in einer Kante zusammen. Das zweidimensionale Analogon ist das (konvexe) Polygon , d.h. das konvexe n-Eck.

Reguläre Polyeder

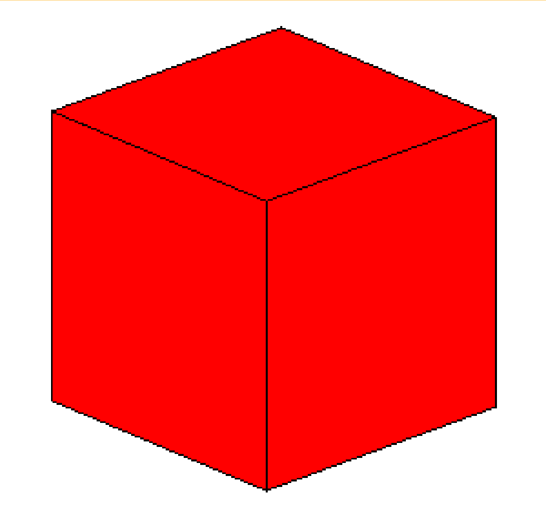
Ein **reguläres** Polyeder ist ein Polyeder, das nur von regelmäßigen n-Ecken begrenzt wird (für einen festen Wert von n) und bei dem in jeder Ecke gleich viele dieser n-Ecke zusammenstoßen.



Tetraeder



Oktaeder



Würfel

Platonische Körper

Satz: Es gibt nur 5 reguläre Polyeder, die 5 Platonischen Körper: **Tetraeder, Oktaeder, Würfel, Dodekaeder und Ikosaeder**.

Beweis: Sei P ein reguläres Polyeder. Der Rand bestehe aus n-Ecken, in jeder Ecke mögen m der n-Ecke zusammenstoßen; m und n müssen mindesten 3 sein. Die Summe der Eckwinkel muss kleiner als 360° sein, also muss gelten:

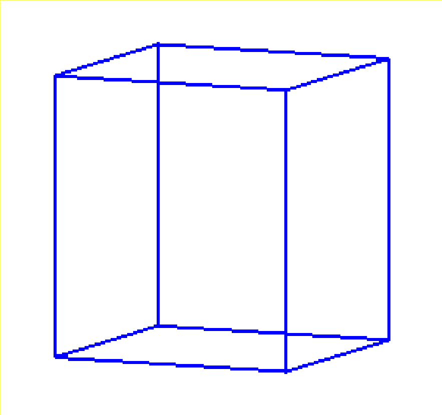
$m*(n-2)/n*180° < 360°$, d.h. $\mathbf{m*n < 2*(m+n)}$.

Für die ganzen positiven Zahlen (n,m) ergeben sich daraus nur die 5 Möglichkeiten

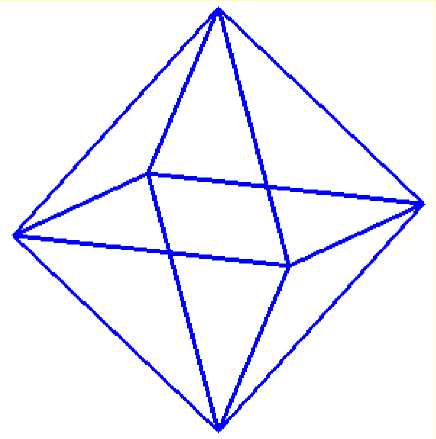
(3,3) Tetraeder , (4,3) Würfel , (3,4) Oktaeder ,

(5,3) Dodekaeder , (3,5) Ikosaeder.

Für jedes Zahlenpaar gibt es genau ein reguläres Polyeder: es ist die Existenz (mindestens eines Körpers durch Konstruktion) und Eindeutigkeit (höchstens einen Körpers) zu zeigen.



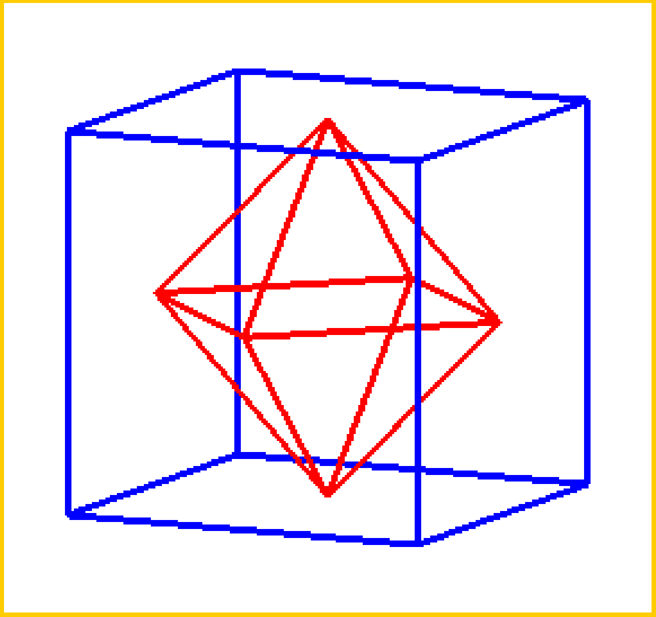
n=4, m=3

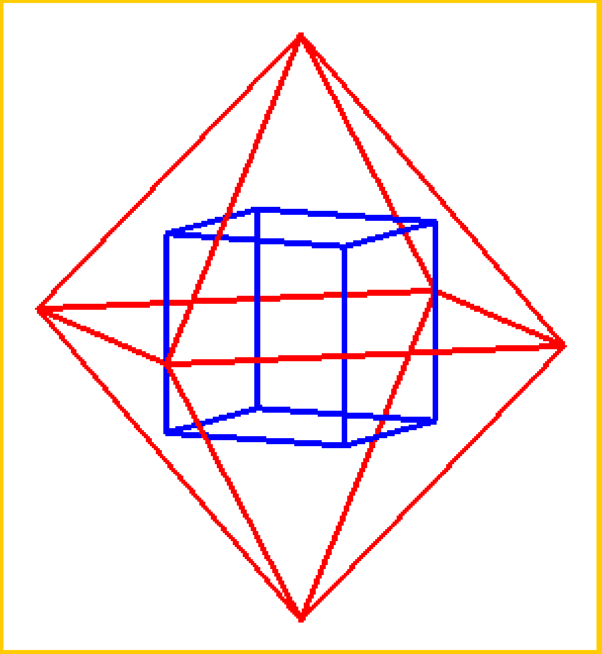


n=3, m=4

Dualität von Würfel und Oktaeder

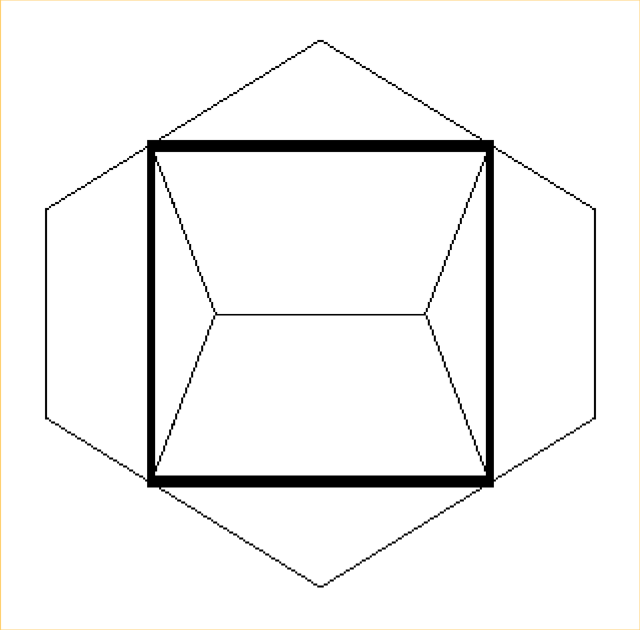
Würfel und Oktaeder haben als Parameter (m,n) die Werte (4,3) und (3,4) : Flächen und Ecken entsprechen sich. Die Flächenmittelpunkte des Würfels (*Oktaeders*) bilden die Eckpunkte eines Oktaeders (*Würfels*) . Die Ecken- und Flächenzahl wird ausgetauscht, die Kantenzahl bleibt gleich.

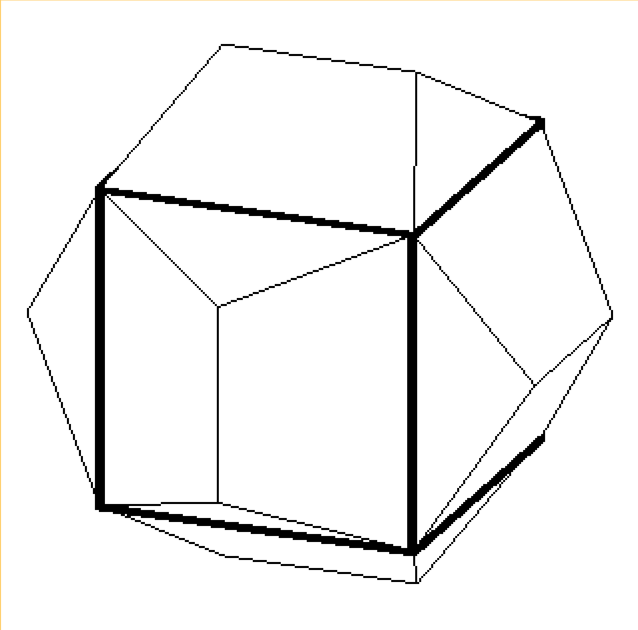




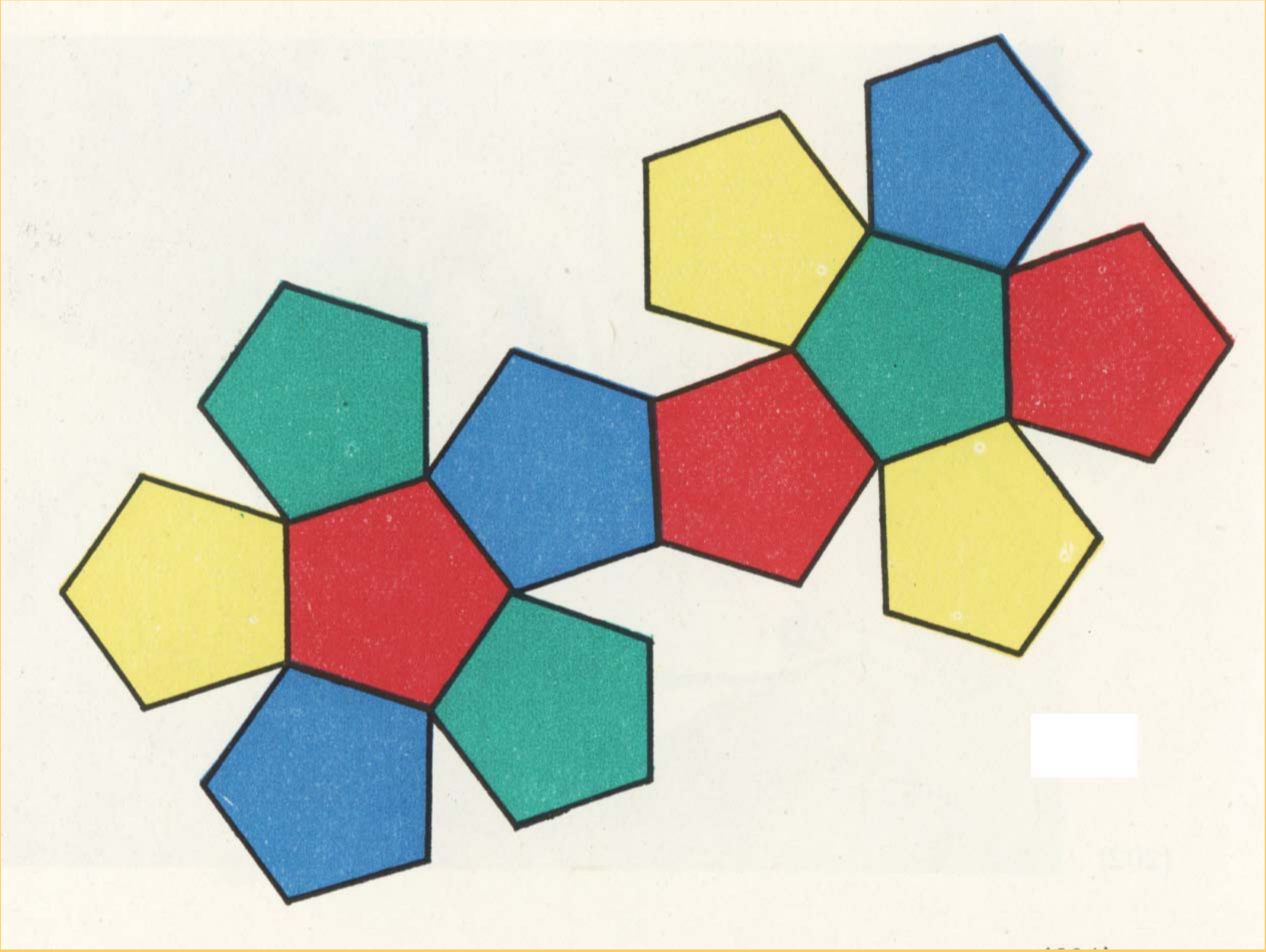
Eine Dodekaeder-Konstruktion

Setze auf jede Seitenfläche eines Würfels der Kantenlänge 1 ein „Walmdach“ auf, mit Firstlänge $(\sqrt{5} - 1) / 2 \sim 0.618$ und Firsthöhe $(\sqrt{5} - 1) / 4 \sim 0.309$ (halbe Firstlänge). In der richtigen Anordnung fügen sich je zwei Dachflächen über verschiedenen Würfelflächen zu regelmäßigen Fünfecken zusammen, die ein **Dodekaeder** begrenzen.



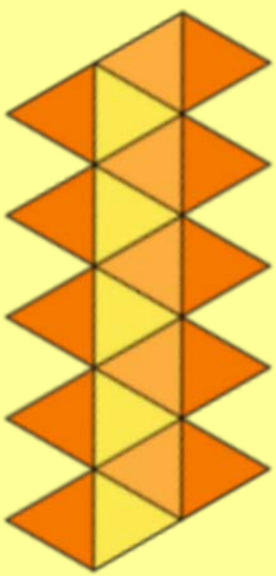


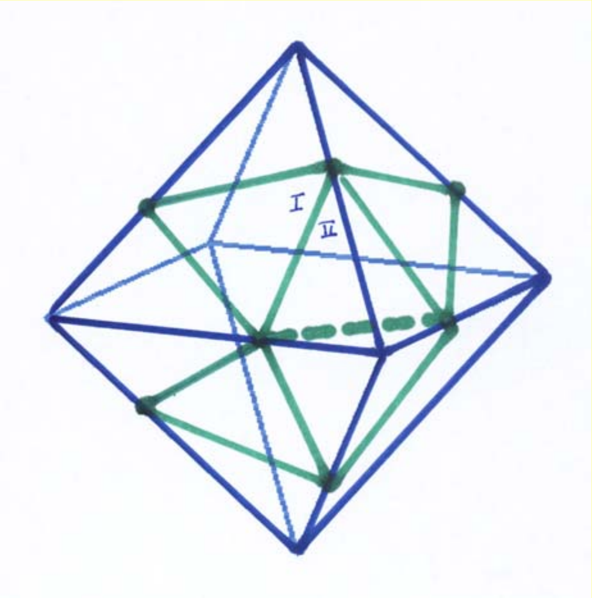
Ein Dodekaedernetz zum Basteln

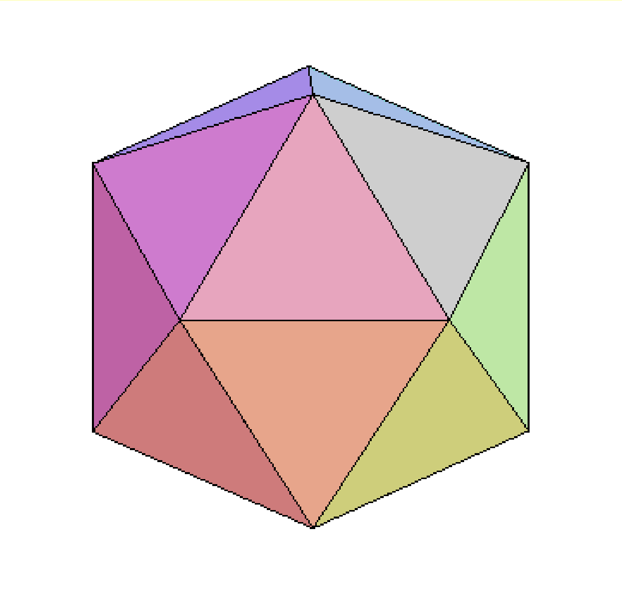


Eine Ikosaeder-Konstruktion

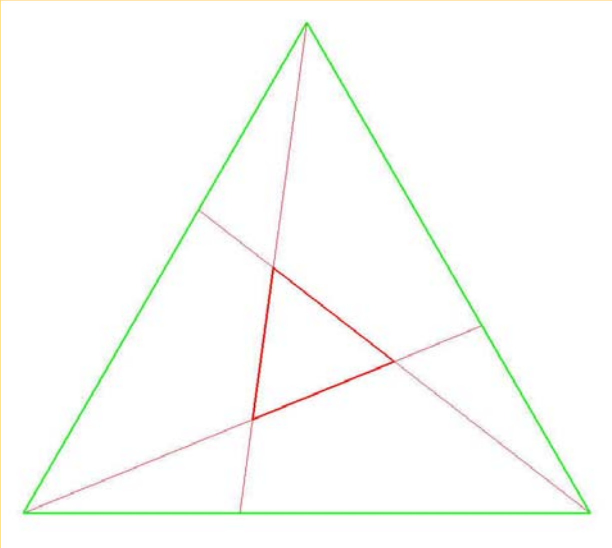
Teile die Kanten eines (regelmäßigen) Oktaeders kohärent im Verhältnis des goldenen Schnittes $1 : x = 1 : (\sqrt{5} + 1) / 2 \sim 1.618$. Die 12 Teilungspunkte bilden die Ecken eines (regelmäßigen) **Ikosaeders.** 8 Dreiecke vom Typ I in den Seitenflächen des Oktaeders sind automatisch gleichseitig, die 12 Dreiecke vom Typ II werden durch das Teilungsverhältnis $1: x$ der Kanten des Oktaeders gleichseitig, sie sind von vorneherein nur gleichschenklig.

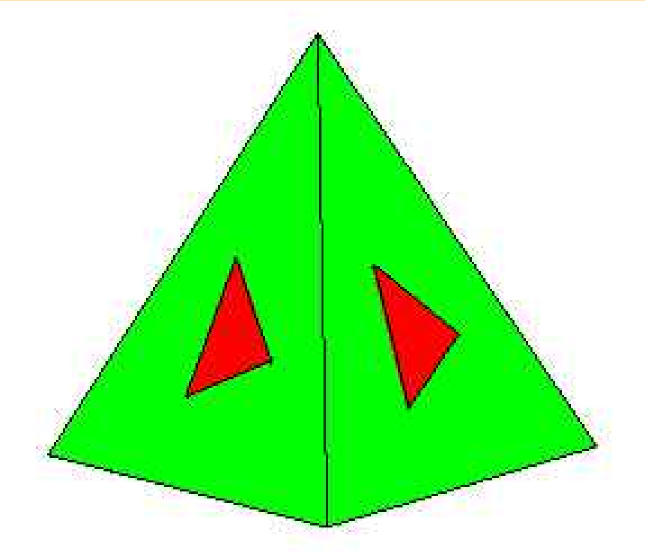






Eine andere Ikosaeder-Konstruktion

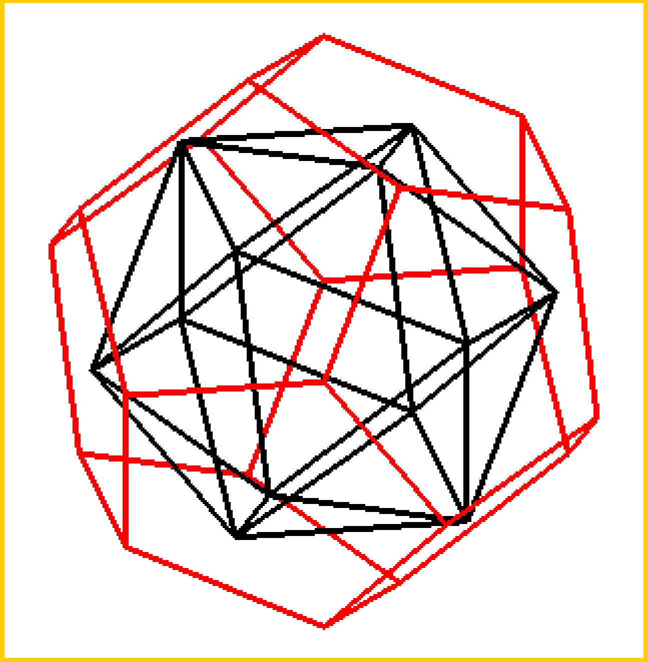


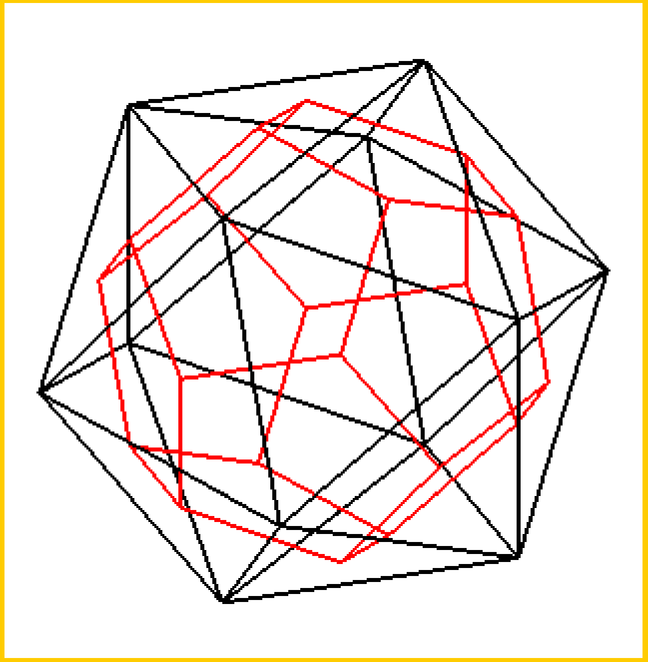


Teile die Seiten eines regelmäßigen Dreiecks im Verhältnis des goldenen Schnittes 1 : x . Verbinde zyklisch die Teilungspunkte mit den gegenüberliegenden Ecken durch Geradensegmente.
Es entsteht ein inneres Dreieck. Unterteilt man in dieser Weise alle vier Seitenflächen eines regulären Tetraeders, erhält man alle Eckpunkte eines regulären Ikosaeders.

Dualität von Dodekaeder und Ikosaeder

Dodekaeder und Ikosaeder haben die Parameter (5,3) und (3,5). Die Flächenmittelpunkte des Dodekaeders (*Ikosaeders*) bilden die Eckpunkte eines Ikosaeders (*Dodekaeders*) . Flächen- und Eckenzahlen werden dabei ausgetauscht, Kantenzahlen bleiben erhalten.





Der Eulersche Polyedersatz

Ist P ein Polyeder, seien E , F , K die Zahlen der Ecken, Seitenflächen bzw. Kanten von P. Für die Platonischen Körper gilt:

	Tetraeder	**Würfel**	**Oktaeder**	**Dodekaeder**	**Ikosaeder**
E	4	8	6	20	12
F	4	6	8	12	20
K	6	12	12	30	30

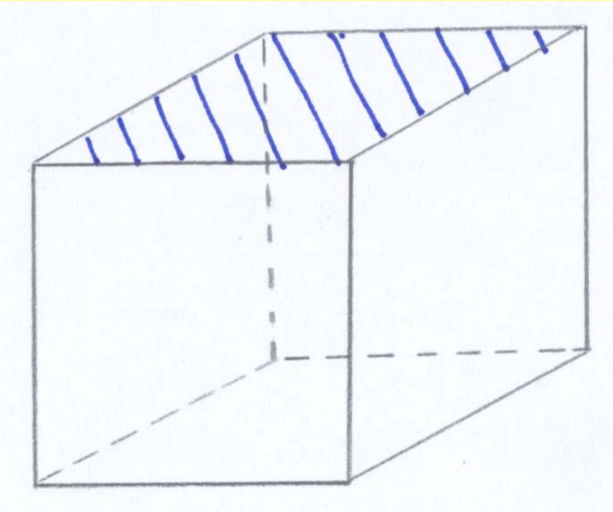
Eulerscher Polyedersatz (1758):

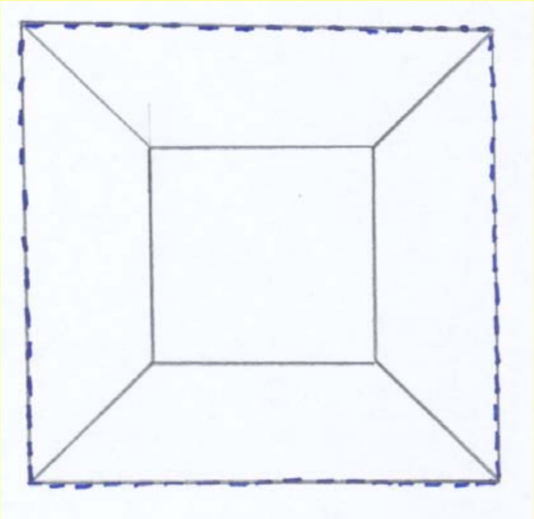
In einem konvexen Polyeder gilt stets die Formel

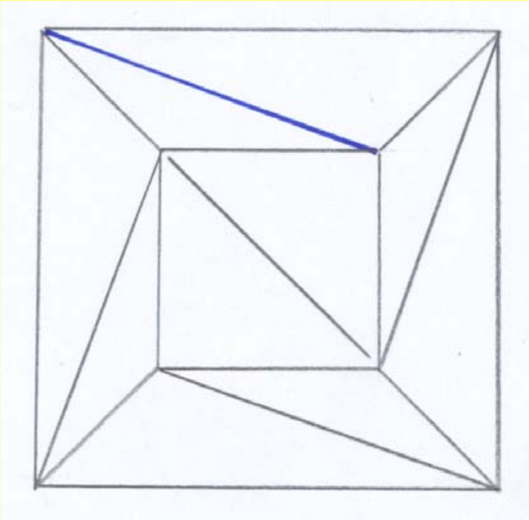
$$E + F = K + 2 .$$

Beweis des Eulerschen Polyedersatzes (I)

Schneide aus dem Polyeder eine Fläche heraus: dafür wäre dann $E+F = K+1$ zu zeigen. Deformiere die verbliebene Oberfläche in die Ebene, wobei die Flächen und Kanten verzerrt werden, die Zahlen E , F und K aber erhalten bleiben. (*Vorstellung einer Gummihaut.)* Trianguliere das so erhaltene Netz (*d.h. erzeuge ein Dreiecksnetz durch zusätzliches Kantenziehen*), sofern einige Flächen noch keine Dreiecke sind. Dabei bleibt wieder die Formel $E+F = K+1$ erhalten: Die Zerlegung eines Viereckes in zwei Dreiecke etwa bedeutet: $F \to F+1$, $K \to K+1$, $E \to E$, also keine Änderung der zu beweisenden Formel.







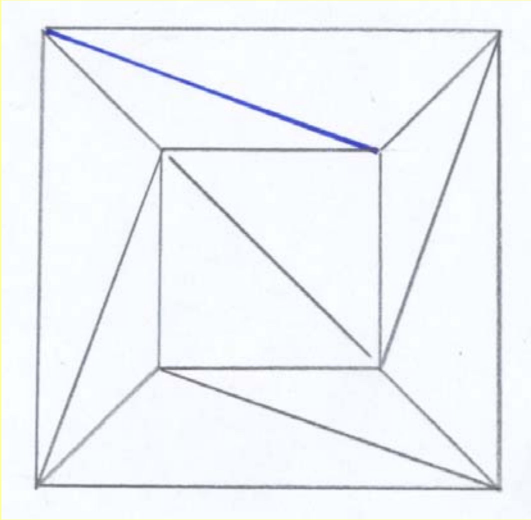
Beweis des Eulerschen Polyedersatzes (II)

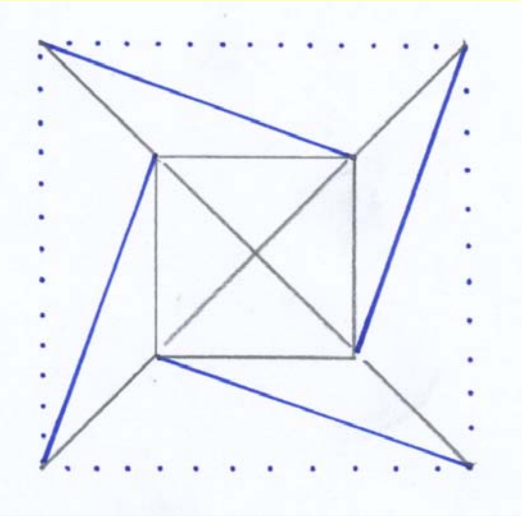
Entferne nacheinander Dreiecke vom so entstandenen Netz, bis am Ende nur noch ein Dreieck übrig bleibt. Beginne mit den äußeren Dreiecken:

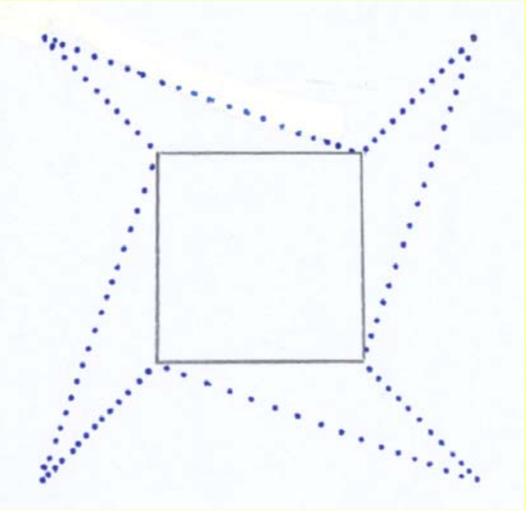
I : Entferne eine Kante und eine Fläche, keine Ecke : E+F = K+1 bleibt erhalten.

II : Entferne zwei Kanten, eine Fläche und eine Ecke: E+F = K+1 bleibt erhalten.

Das letzte Dreieck erfüllt (*natürlich*) E+F = K+1 (da 3+1 = 3+1 ist). Kehre die Schlussfolgerungen um, um zum Ausgangsnetz zurückzukommen.

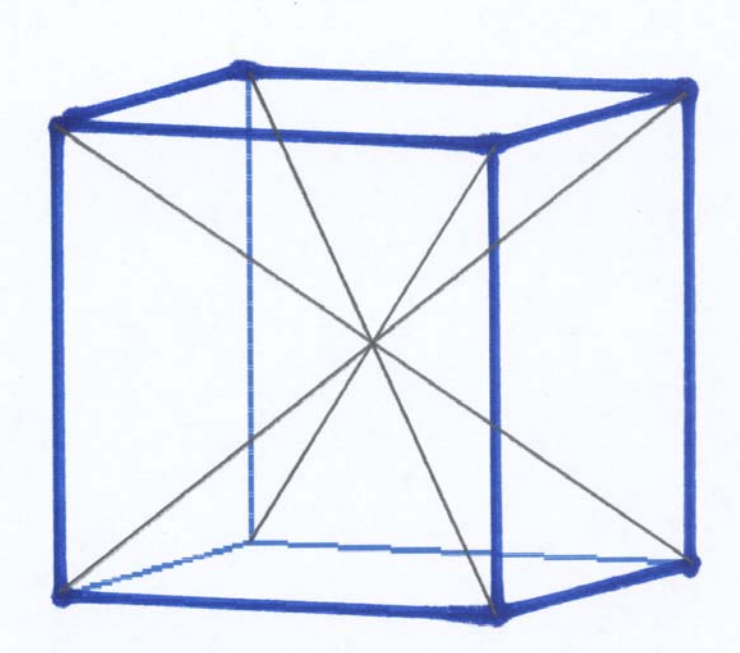


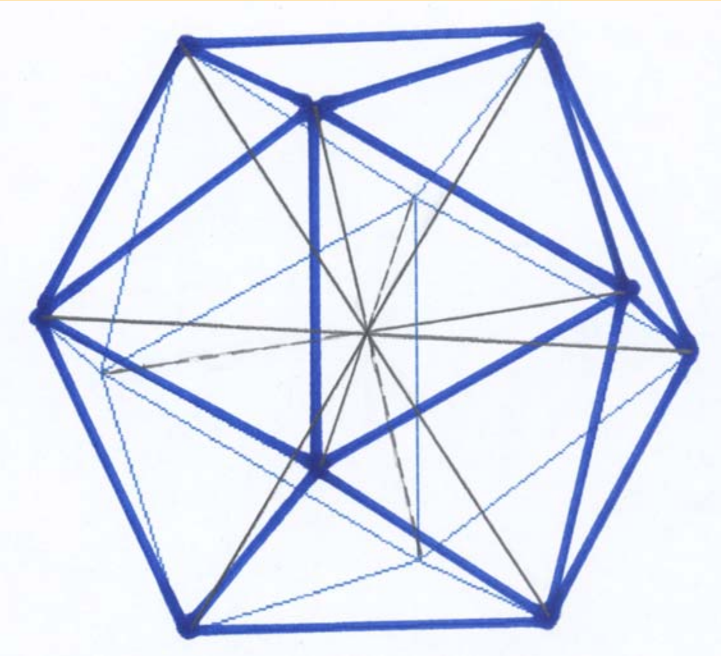




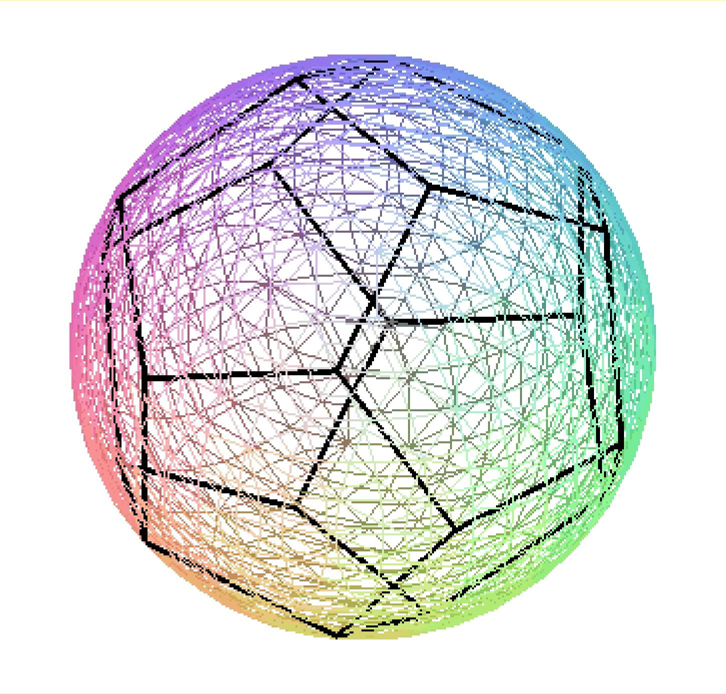
Diagonalen des Würfels und des Ikosaeders

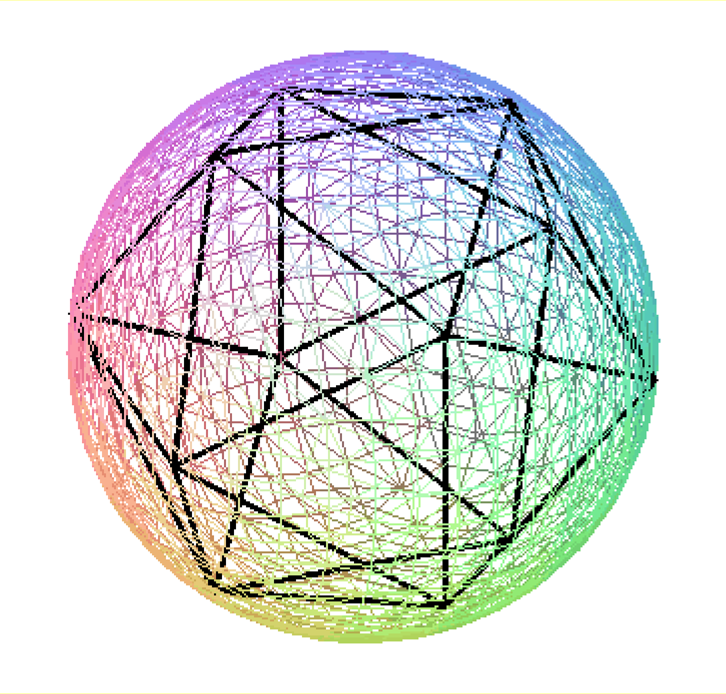
Die 4 Diagonalen des Würfels schneiden sich unter gleichen Winkeln von jeweils 70,5° ; die 6 Diagonalen des Ikosaeders bilden ebenfalls gleiche Winkel miteinander, in dem Fall von 63,4° . Die cos-Werte beider Winkel sind 1/3 bzw. $1/\sqrt{5}$.





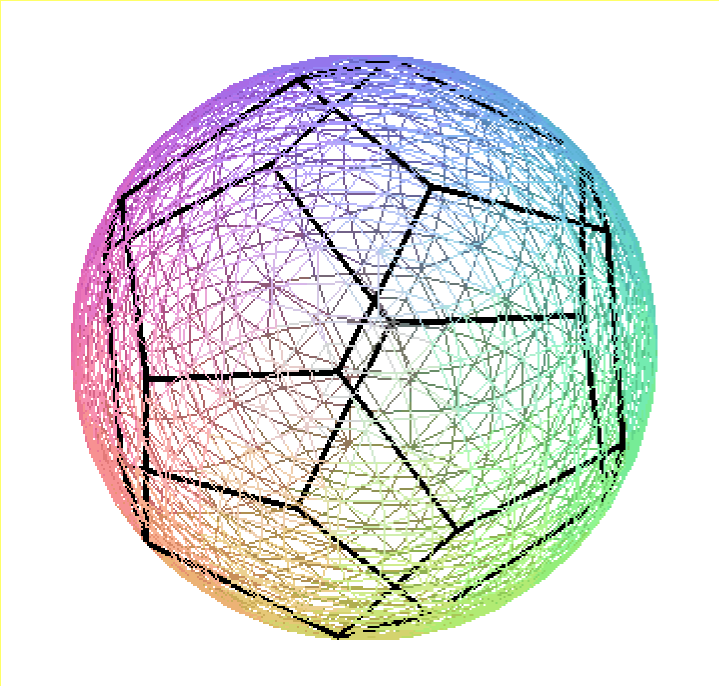
Approximation der Kugel

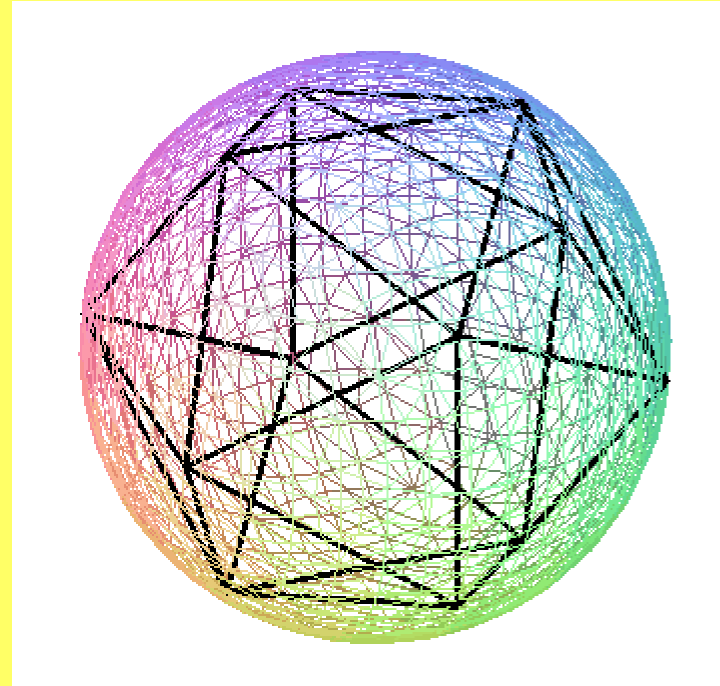




Nähert man die Kugel durch einbeschriebene Dodekaeder bzw. Ikosaeder an, welcher Körper approximiert die Kugel volumenmäßig (*flächenmäßig*) besser?

Approximation der Kugel



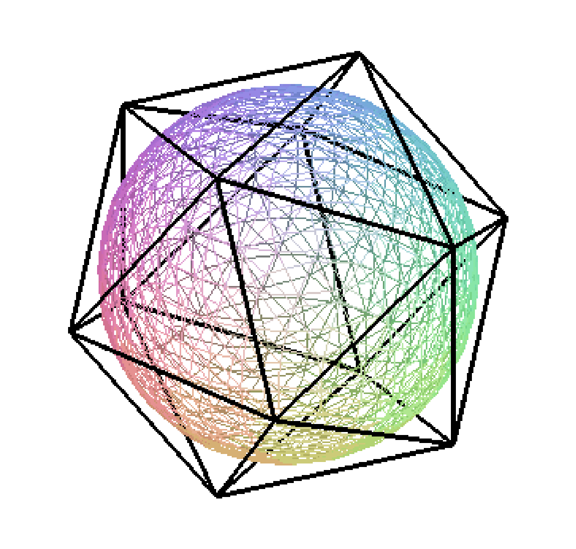


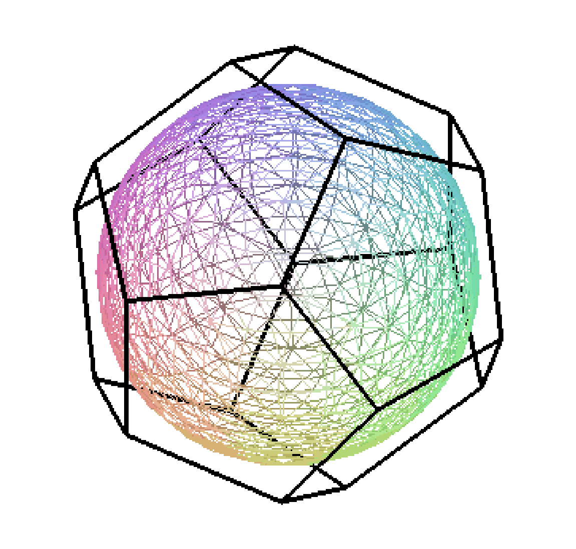
Nähert man die Kugel durch einbeschriebene Dodekaeder bzw. Ikosaeder an, welcher Körper approximiert die Kugel volumenmäßig (*flächenmäßig*) besser?

Volumen: Dodekaeder 66,5 % , Ikosaeder 60,5 %

Oberfläche: Dodekaeder 83,7 % , Ikosaeder 76,2% .

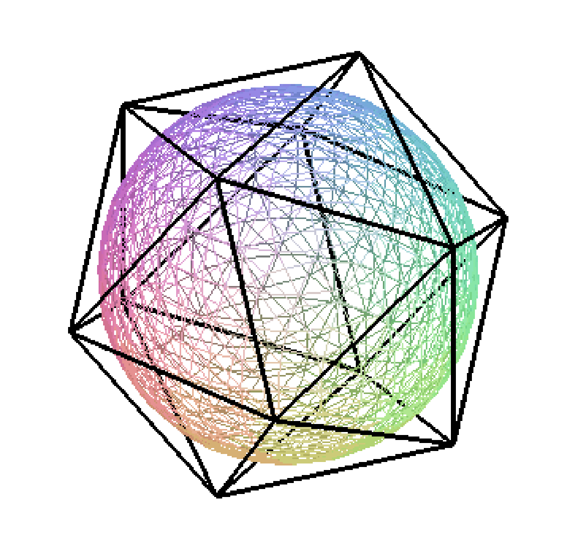
Approximation der Kugel von außen

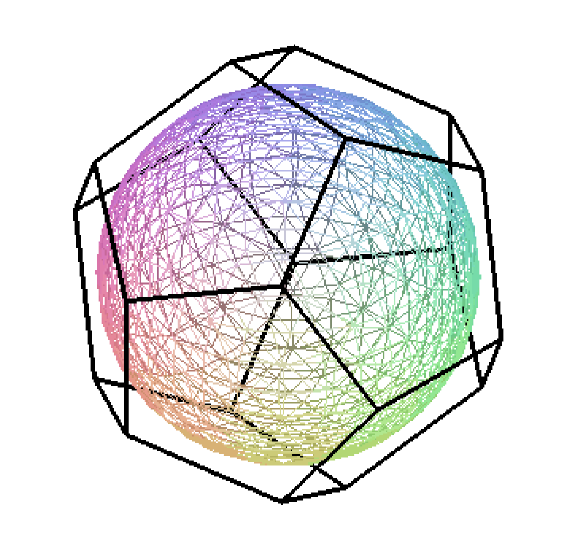




Bei Approximation von außen - erzielt das Ikosaeder oder das Dodekaeder die bessere Annäherung an die Kugel?

Approximation der Kugel von außen



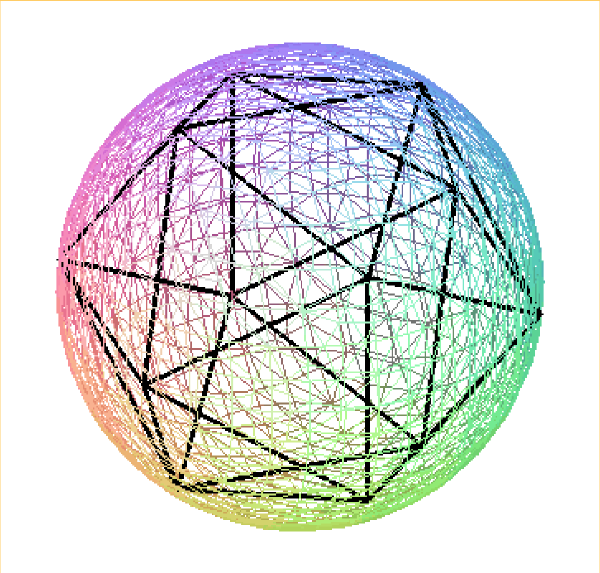


Bei Approximation von außen - erzielt das Ikosaeder oder das Dodekaeder die bessere Annäherung an die Kugel?

Volumen: Ikosaeder 120,7 % , Dodekaeder 132,5 %

Oberfläche: Ikosaeder 120,7 % , Dodekaeder 132,5 %

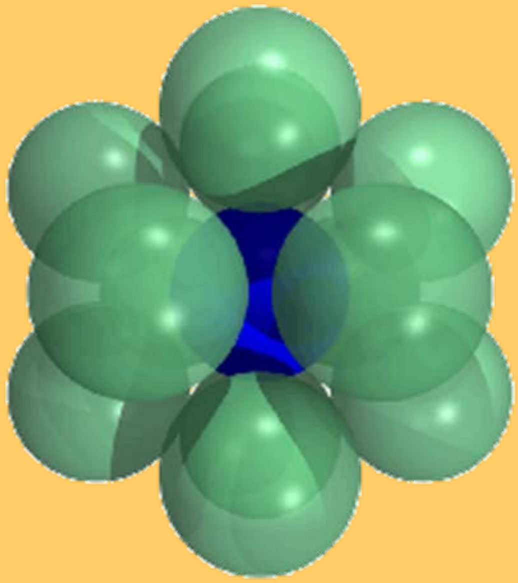
Das Kusszahlproblem



Das einbeschriebene Ikosaeder berührt die Kugel in allen seinen 12 Eckpunkten. In diesen Punkten kann man 12 gleich große Kugeln anlegen, die die mittlere Kugel *küssen*, sich nicht berühren und sogar etwas Zwischenraum lassen, da die Mittelpunkts-winkel der Diagonalen des Ikosaeders 63,4° und damit etwas mehr als 60° betragen.

Kusszahlproblem (Newton, Gregory): Kann man sogar 13 küssende Kugeln finden, die gleiche Größe wie die mittlere Kugel haben und disjunkt sind?

(Der vom Zentralkugel-Mittelpunkt und einer äußeren Kugel erzeugte Kegel schneidet aus der mittleren Kugel weniger als 1/14 ihrer Oberfläche aus.)



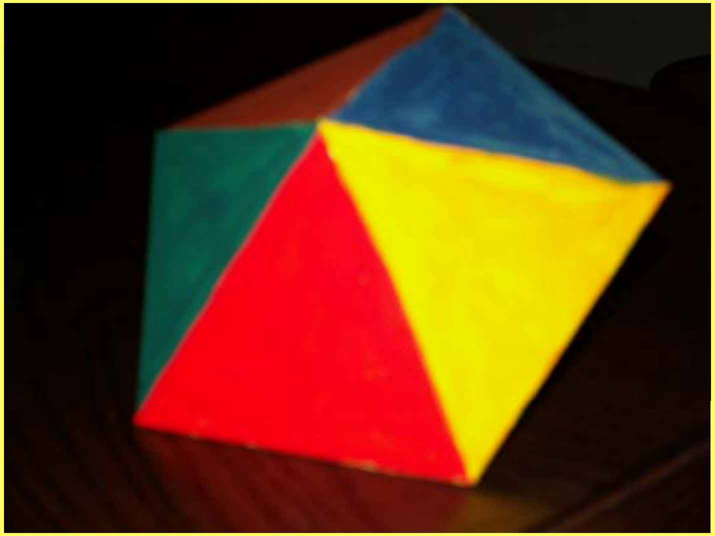
Leech (1956): NEIN, 12 ist die Maximalzahl, wiewohl die Kugeln noch verschiebbar sind.

Deltaeder

Bei den **Platonischen Körpern** waren alle Seiten regelmäßige n-Ecke für ein festes n (n=3, 4, 5) und in den Ecken stießen jeweils gleich viele Flächen (m =3, 4, 5) zusammen. Verzichtet man auf die letzte Forderung, gibt es fünf weitere Körper, die von regelmäßigen **Dreiecken** begrenzt werden, bei denen aber in verschiedenen Ecken unterschiedlich viele Flächen zusammenstoßen.
(*Es kommen keine Körper hinzu, die von regelmäßigen Vier- oder Fünfecken begrenzt werden.*)

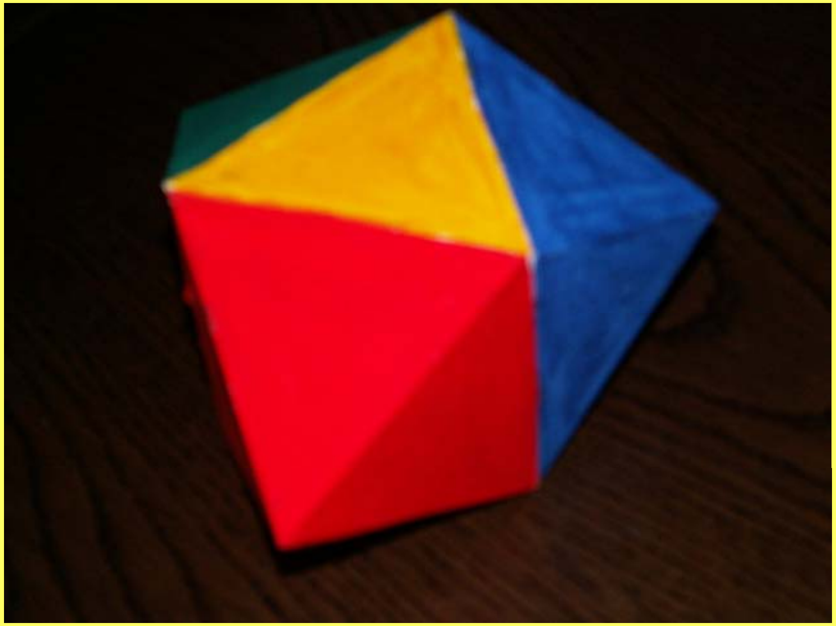
Diese Körper werden auch **Deltaeder** genannt. Zwei einfache sind:

Doppeltes Tetraeder

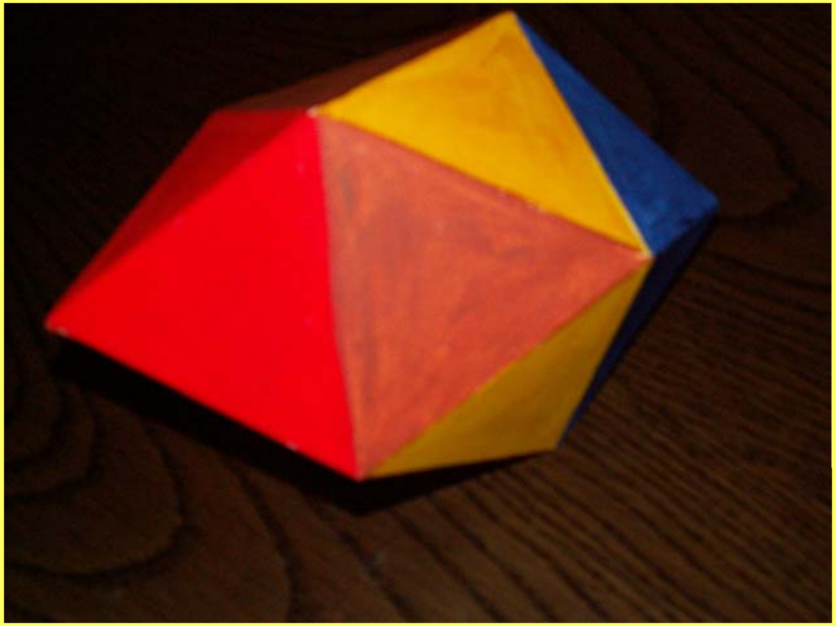


Doppelte Fünfeck-Pyramide

Zwei weitere Deltaeder

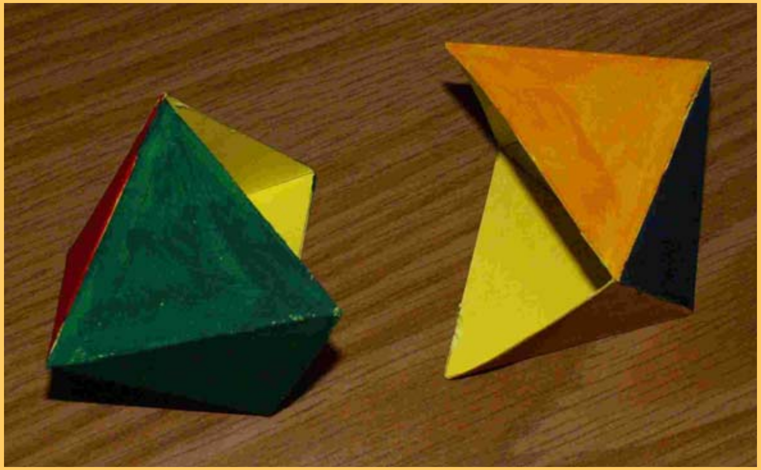


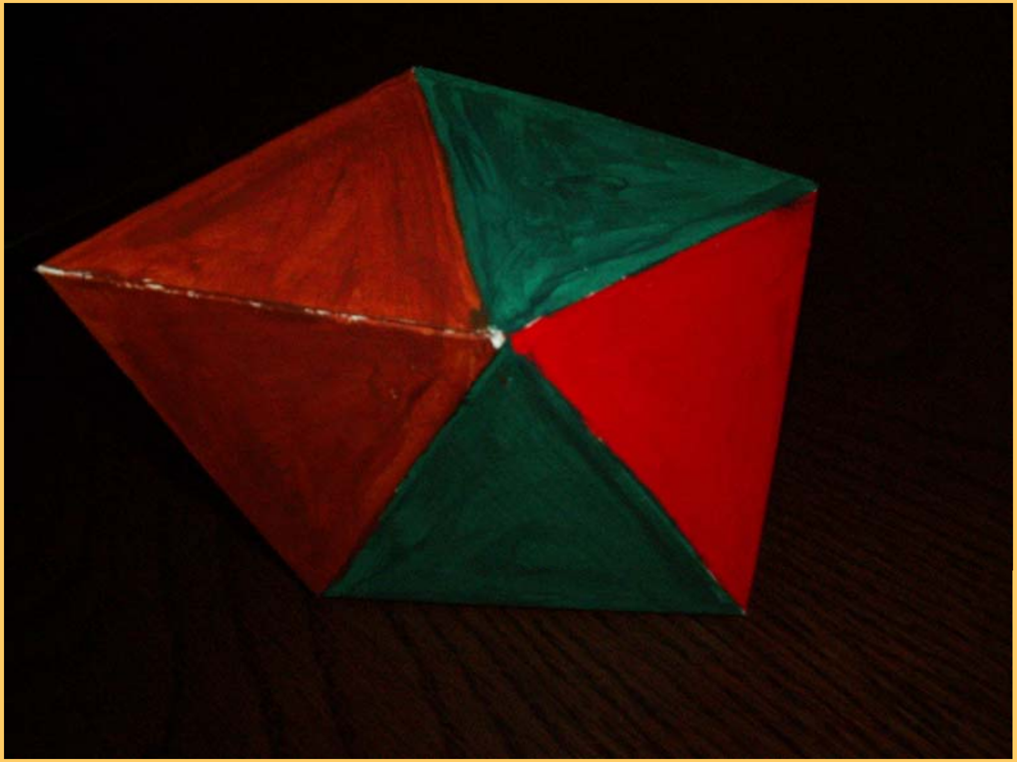
Drei Viereckspyramiden auf einem Prisma



Zwei Viereckspyramiden auf einem Antiprisma

Das Siamesische Dodekaeder





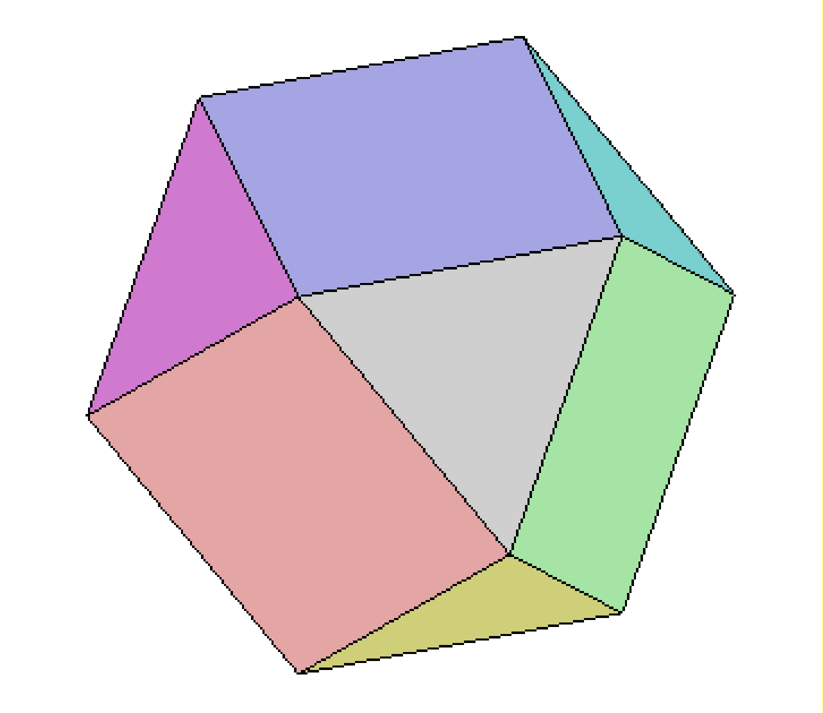
Siamesisches Dodekaeder oder auch Trigondodekaeder – dies ist ein Zwölfflächner, zusammengesetzt aus zwei „geöffneten Schnäbeln“. Es ist das am schwierigsten zu konstruierende Deltaeder. Um die Winkel und Ecken zu finden, sind kubische Gleichungen für Sinus und Kosinus zu lösen.

Archimedische Körper

Eine andere Abschwächung der Platonischen Körper sind die **Archimedischen Körper** oder auch **halbregulären Körper**. Dabei wird -anders als bei den Deltaedern- weiterhin gefordert, dass alle Ecke „gleich aussehen". Die Rand-flächen sollen weiterhin regelmäßige n-Ecke sein, es dürfen jetzt aber verschiedene n-Eckstypen auftreten, z.B. Dreiecke mit Vierecken kombiniert werden.

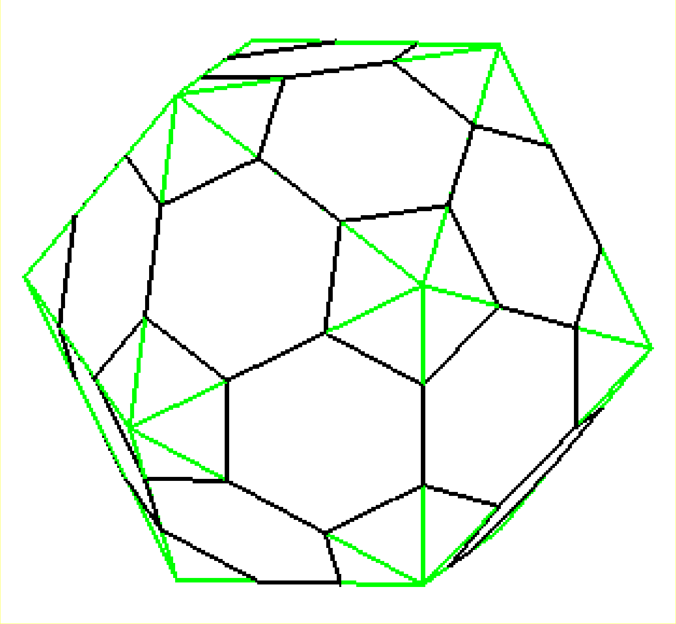
'Gleich aussehen' bedeutet, dass jede Ecke mit ihrer zyklischen Flächenfolge durch eine Symmetrieabbildung des Körpers in jede andere überführt werden kann . (*Eckentransitivität der Symmetriegruppe.*)

Der Körper kann durch die Flächenfolge in jeder Ecke charakterisiert werden, etwa (3,4,3,4) für das **Kuboktaeder**, wo in jeder Ecke zyklisch ein Dreieck, ein Viereck, ein Dreieck und ein Viereck zusammenstoßen.



Der Fußball

Teilt man jede Seite eines regulären Dreiecks durch zwei Punkte in drei gleiche Teile, erhält man die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks. Schneidet man von einem Ikosaeder an jeder der 12 Ecken eine fünfeckige Pyramide (*mit Seitenlänge 1/3 der Kantenlänge des Ikosaeders*) ab, erhält man den **Fußball** als abgestumpftes Ikosaeder mit 20 regelmäßigen Sechsecken und 12 regelmäßigen Fünfecken als Seitenflächen.



(5,6,6)