

\$Id: potential.tex,v 1.6 2009/12/17 19:41:04 hk Exp \$

\$Id: flaechen.tex,v 1.2 2009/12/17 19:41:24 hk Exp \$

§4 Potentialfelder

4.3 Das Potentialkriterium

Wie waren gerade bei der Diskussion des Vektorfelds

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \frac{x}{x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{y}{x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial x}$$

auf dem Gebiet $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und hatten gesehen das F das Potentialkriterium erfüllt aber trotzdem kein Potentialfeld ist. Ebenso hatten wir uns überzeugt das F ein Potentialfeld wird, wenn das Gebiet U durch ein kleineres Gebiet ersetzt wird, auf dem die Polarkoordinaten überall definiert und bijektiv sind. Das Potenzial ist dann $\varphi(r, \phi) = \phi$ in Polarkoordinaten.

In cartesischen Koordinaten ist das ganze etwas unangenehmer. Auf der rechten Halbebene $x > 0$ können wir beispielsweise

$$\varphi(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

schreiben und dann ist tatsächlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) &= -\frac{y}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) &= \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

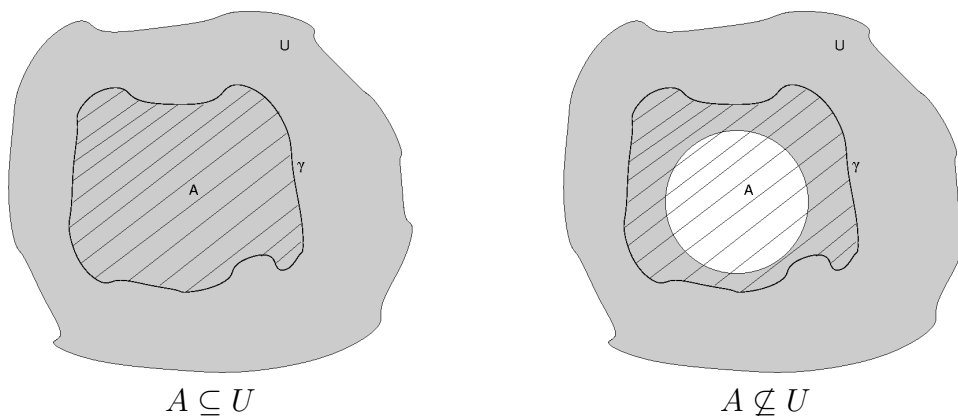
Wenn man unbedingt eine konkrete Formel braucht kann man sich an den komplexen Logarithmus aus §13.4 im ersten Semester erinnern und dann $\varphi(z) = \text{Im}(\log z)$ für $z \in \mathbb{C}^-$ schreiben.

Das Problem bei der Umkehrung des Potentialkriteriums liegt nicht so sehr an der Funktion, sondern an ihrem Definitionsbereich. Wir wollen uns zunächst in der Dimension $n = 2$ klarmachen welche Bedingung an U benötigt wird. Es seien also ein Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und ein stetig differenzierbares Vektorfeld $F = (f, g) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, das das Potenzialkriterium $\partial f / \partial y = \partial g / \partial x$ erfüllt, gegeben. Damit F ein Potenzialfeld ist brauchen wir $\oint_{\gamma} F \cdot ds = 0$ für jede geschlossene Kurve γ in U . Wir wollen hier keine exakte Überlegung durchführen, sondern beschränken uns auf den Fall das γ keine Selbstüberschneidungen hat, also bis auf die Randpunkte injektiv ist. In diesem

Fall berandet γ ein Flächenstück A von dem wir weiter annehmen das es einfach glatt berandet ist. Ist dann $A \subseteq U$, so können wir mit dem Satz von Green §3.Satz 5

$$\oint_{\gamma} F(s) \cdot ds = \pm \oint_{\partial A} F(s) \cdot ds = \pm \int_A \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) d(x, y) = 0$$

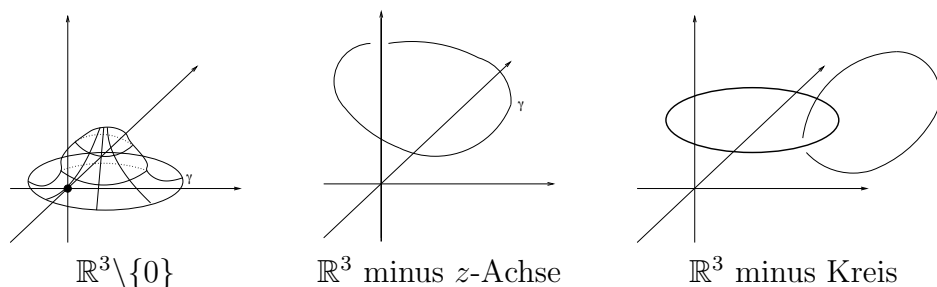
rechnen, wobei sich das Vorzeichen danach richtet ob γ im Uhrzeigersinn oder im Gegenuhrzeigersinn um A läuft. Dies funktioniert nicht wenn die Menge A nicht in U enthalten ist.



Diese Situation tritt beispielsweise auf, wenn das Gebiet U wie im rechten Bild ein Loch hat und die Kurve γ um dieses Loch herumläuft. Dies ist tatsächlich genau das was in unserem Beispiel passiert, dort ist $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, d.h. das „Loch“ besteht aus einem einzelnen Punkt, dem Nullpunkt, und die Kurve $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$ läuft um dieses Loch herum. Ein einzelner Punkt reicht also aus um die Umkehrung des Potentialkriteriums zunichte zu machen.

Hat die Menge U die Eigenschaft das mit jeder einfach geschlossenen Kurve γ in U auch die von γ berandete Menge in U liegt, so ist jedes stetige Vektorfeld auf U das das Potentialkriterium erfüllt bereits ein Potentialfeld. Dies ist somit die geometrische Bedingung an U die im zweidimensionalen Fall die Umkehrung des Potentialkriteriums garantiert.

In drei und mehr Dimensionen ist die Lage etwas komplizierter, ein einzelner Punkt ist dort nicht weiter tragisch. In drei Dimensionen können wir versuchen die Kurve γ in eine gebogene Ebene zu packen die ebenfalls ganz in U liegt und in der γ eine in U liegende Menge berandet. Ein einzelner weggenommener Punkt stört da nicht, diesen kann man in drei Dimensionen einfach ausweichen, etwa indem die Fläche nach unten oder oben ausgebeult wird. Nehmen wir dagegen beispielsweise die ganze z -Achse weg, und lassen die Kurve γ um diese herum laufen, so kann man keine Fläche in γ einspannen die nicht irgendwo durch die z -Achse läuft. Denselben Effekt kann man auch durch das Entfernen beschränkter Mengen erreichen, wird beispielsweise ein Kreis entfernt und schlingt sich die Kurve γ einmal um diesen Kreis herum, so kann wieder keine Fläche eingespannt die den Kreis nicht trifft.



Diese Überlegungen vermitteln zwar die richtige Anschauung welche geometrische Eigenschaft von U für die Umkehrung des Potentialkriteriums benötigt wird, für eine exakte Definition in Dimension $n \geq 3$ sind sie aber nicht geeignet. Zum einen müsste man näher spezifizieren was mit „um etwas herumschlingen“ genau gemeint ist, und zum anderen gibt es Kurven im \mathbb{R}^3 die man selbst im ganzen \mathbb{R}^3 nicht in eine Fläche einspannen kann in der sie Rand eines Gebiets werden. Anstelle eingespannter Flächen betont die nun kommende Definition daher das Zusammenziehen der Kurven auf einzelne Punkte.

Definition 4.5: Ein Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend wenn sich jede geschlossene Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ stetig auf jeden Punkt $p \in U$ zusammenziehen läßt, es also immer eine stetige Abbildung $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$ mit $H(t, 0) = \gamma(t)$, $H(t, 1) = p$ und $H(a, s) = H(b, s)$ für alle $a \leq t \leq b$, $0 \leq s \leq 1$ gibt.

Für die Dimension $n = 2$ ist diese Bedingung tatsächlich zur oben formulierten Bedingung äquivalent. Etwas anschaulicher kann man sagen das ein einfach zusammenhängendes Gebiet keine Löcher hat um die man etwas herumwickeln kann. Die exakte Definition ist hier eher der Vollständigkeit halber angegeben, wir werden sie hier nicht weiter verwenden. Beispielsweise ist jedes sternförmige Gebiet auch einfach zusammenhängend und diese Gebiete reichen für unsere Zwecke auch meistens aus.

Satz 4.2 (Potentialkriterium)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und F ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U mit Komponentenfunktionen F_1, \dots, F_n .

- (a) Ist F ein Potentialfeld so erfüllt F das Potentialkriterium, d.h. es ist $\partial F_i / \partial x_j = \partial F_j / \partial x_i$ für alle $1 \leq i < j \leq n$.
- (b) Ist U einfach zusammenhängend und erfüllt F das Potentialkriterium, so ist F umgekehrt ein Potentialfeld.

4.4 Unbestimmte Integration

Wir wollen noch kurz eine weitere Rechentechnik zur Bestimmung von Potentialen angeben, die vor allen bei auf Normalbereichen definierten Vektorfeldern anwendbar ist. Solche Mengen sind insbesondere einfach zusammenhängend. Hat man ein Vektorfeld

F mit Komponenten F_1, \dots, F_n das das Potentialkriterium erfüllt, so ist ein Potential φ von F durch die Gleichungen

$$F_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, F_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, F_n = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$$

definiert. Man kann dann versuchen das Potential zu berechnen indem diese Gleichungen schrittweise dazu benutzt werden jeweils eine Variable zu behandeln. Wie dies geht sieht man am besten durch einige Beispiele. Zunächst betrachten wir das Gebiet $U := \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi/2, \pi/2)$ und das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$F(x, y) = \left(-\frac{\tan y}{x^2} + 2xy + x^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{1}{x \cos^2 y} + x^2 + y^2 \right) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Wir überprüfen zunächst das Potentialkriterium

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\tan y}{x^2} + 2xy + x^2 \right) &= -\frac{1}{x^2 \cos^2 y} + 2x, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x \cos^2 y} + x^2 + y^2 \right) &= -\frac{1}{x^2 \cos^2 y} + 2x, \end{aligned}$$

und dieses ist damit erfüllt. Die erste Bedingung an ein Potential φ ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\tan y}{x^2} + 2xy + x^2$$

d.h. denken wir uns y fixiert, so ist $\varphi(x, y)$ als Funktion von x eine Stammfunktion von $-\tan y/x^2 + 2xy + x^2$. Berechnen wir also das unbestimmte Integral

$$\int \left(-\frac{\tan y}{x^2} + 2xy + x^2 \right) dx = \frac{\tan y}{x} + x^2 y + \frac{1}{3} x^3$$

der rechten Seite und erinnern uns daran das die Stammfunktion einer reellen Funktion bis auf eine additive Konstante eindeutig festgelegt ist, so unterscheidet sich das eben ausgerechnete unbestimmte Integral vom Potential $\varphi(x, y)$ nur durch eine von y abhängige Konstante $h(y)$, wir haben also

$$\varphi(x, y) = \frac{\tan y}{x} + x^2 y + \frac{1}{3} x^3 + h(y).$$

Die zweite Bedingung an das Potential φ ist $\partial \varphi / \partial y = 1/(x \cos^2 y) + x^2 + y^2$, und kombinieren wir dies mit der Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x \cos^2 y} + x^2 + h'(y)$$

so erhalten wir

$$h'(y) = y^2$$

und durch Integration von h folgt

$$h(y) = \int y^2 dy = \frac{1}{3}y^3.$$

Eigentlich ist dies auch nur bis auf eine additive Konstante, aber da auch das Potential nur bis auf eine solche festgelegt ist, können wir die Konstante auch gleich hier weglassen. Insgesamt ergibt sich als Potential

$$\varphi(x, y) = \frac{\tan y}{x} + x^2y + \frac{1}{3}(x^3 + y^3).$$

Machen wir dasselbe noch einmal dreidimensional, diesmal mit dem auf ganz \mathbb{R}^3 definierten Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (z^2 - y \sin x) \frac{\partial}{\partial x} + (\cos x - 2z) \frac{\partial}{\partial y} + (2xz - 2y + z) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Überprüfen wir zunächst wieder das Potentialkriterium

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\sin x = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 2z = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = -2 = \frac{\partial F_3}{\partial y},$$

das Vektorfeld F ist also ein Potentialfeld. Diesmal beginnen wir mit dem unbestimmten Integral der ersten Komponente

$$\int (z^2 - y \sin x) dx = z^2x + y \cos x$$

und haben wie oben, nur diesmal mit fixierten y und z

$$\varphi(x, y, z) = z^2x + y \cos x + h(y, z).$$

Damit ist

$$\cos x - 2z = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \cos x + \frac{\partial h}{\partial y}(y, z)$$

also

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -2z$$

und eine weitere unbestimmte Integration bei fixierten z ergibt

$$h(y, z) = -2yz + g(z) \implies \varphi(x, y, z) = z^2x + y \cos x - 2yz + g(z).$$

Die dritte Bedingung an φ wird somit zu

$$2xz - 2y + z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2xz - 2y + g'(z) \implies g'(z) = z.$$

Somit ist

$$g(z) = \frac{1}{2}z^2 \implies \varphi(x, y, z) = z^2x + y \cos x - 2yz + \frac{1}{2}z^2.$$

§5 Integration über Flächenstücke

Wir kommen jetzt zur letzten noch einzuführenden Sorte von Integralen, den schon in §3 angekündigten Oberflächen- beziehungsweise Flächenintegralen. Sowohl rechnerisch als auch inhaltlich kommt hier nicht viel neues hinzu. Da Flächen etwas kompliziertere Objekte als Kurven sind erhöht sich nur der technische Aufwand etwas. Während wir Kurvenintegrale noch in beliebiger Dimension behandelt haben, werden wir uns in diesem Kapitel ausschließlich um den dreidimensionalen Fall $n = 3$ kümmern.

5.1 Flächen im \mathbb{R}^3

Eine Fläche im \mathbb{R}^3 ist eine „vernünftige“ zweidimensionale Teilmenge im Raum \mathbb{R}^3 . Beispiele von Flächen sollen Dinge wie der Rand einer Kugel, der Rand eines Torus, Rechtecke, der Rand eines Würfels und so weiter sein. In den meisten Punkten einer Fläche wird es eine Tangentialebene geben, aber genau wie bei Kurven lassen wir auch Punkte zu in denen es keine Tangentialebene gibt. Dies ist nötig damit beispielsweise der Rand eines Würfels eine Fläche wird. Technisch wird dies wie bei Kurven erreicht, eine allgemeine Fläche werden wir aus mehreren Flächenstücken zusammensetzen und die Tangentialebene fehlt dann höchstens in den Punkten an denen die verschiedenen Flächenstücke zusammenkommen. Beispielsweise wird der Rand eines Würfels aus sechs Teilstücken gebildet, nämlich den sechs Seitenflächen des Würfels.

Wir beginnen daher mit der Definition der einzelnen Teilstücke. Eine Kurve wurde beschrieben indem die x, y und z Koordinaten ihrer Punkte als Funktionen $x = \gamma_1(t)$, $y = \gamma_2(t)$ und $z = \gamma_3(t)$ geschrieben wurden, wobei der Parameter t ein Intervall durchläuft. Entsprechend werden wir Flächenstücke beschreiben indem die x, y, z Koordinaten ihrer Punkte durch Funktionen in zwei Variablen parametrisiert werden $x = \varphi_1(t, s)$, $y = \varphi_2(t, s)$ und $z = \varphi_3(t, s)$. Die für die Parameter t, s zugelassenen Definitionsbereiche sind leider etwas komplizierter als einfache Intervalle, aber wir werden sie gleich in der folgenden Definition angeben. Die Funktion φ muss natürlich ebenfalls einige Bedingungen erfüllen. Zum einen soll sie stetig differenzierbar sein. Das reicht aber noch nicht, man braucht noch Bedingungen die sicherstellen das ihr Bild auch wirklich zweidimensional ist.

Zum einen soll die Abbildung φ injektiv sein, d.h. verschiedenen Werten $(t, s) \neq (t', s')$ der Parameter sollen auch verschiedene Punkte $\varphi(t, s) \neq \varphi(t', s')$ entsprechen. Um auch so etwas wie die Kugelkoordinaten zu erfassen, werden wir dies noch etwas abschwächen und die Injektivität nur im Inneren des Parameterbereichs fordern. Weiter soll es in einem solchen Flächenstück in jedem Punkt eine Tangentialebene geben. Diese wird von den Vektoren tangential an den durch φ gegebenen Koordinatenlinien aufgespannt, und daher fordern wir das diese überhaupt eine Ebene aufspannen, also linear unabhängig sind. Damit kommen wir zur folgenden Definition:

Definition 5.1: Sei $F \subseteq \mathbb{R}^3$. Eine Parametrisierung von F ist eine surjektive, stetige differenzierbare Abbildung $\varphi : A \rightarrow F$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) Es ist $A = \bar{U}$ mit einer offenen, beschränkten, Jordan-meßbaren Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$.
- (b) Eingeschränkt auf U ist die Abbildung φ injektiv.
- (c) Für jedes $(x, y) \in U$ sind die beiden Tangentialvektoren

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \in \mathbb{R}^3$$

linear unabhängig. Die Ebene

$$T_p(F) := p + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right\rangle$$

nennt man dann auch die Tangentialebene von F im Punkt $p = \varphi(x, y)$.

Die Menge $F \subseteq \mathbb{R}^3$ nennt man dann auch ein Flächenstück. Schließlich heißt eine Menge $F \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche, wenn es Flächenstücke $F_1, \dots, F_r \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $F = F_1 \cup \dots \cup F_r$ gibt, die sich untereinander höchstens in Kurven schneiden.

Wir wollen einige Beispiele durchgehen. Zunächst sei F der Rand einer Kugel mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt $p = (a, b, c)$. Durch Verschieben des Nullpunkts können wir F im wesentlichen in Kugelkoordinaten durch die Parametrisierung

$$\varphi : A := [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3; (\phi, \psi) \mapsto (a + R \cos \phi \sin \psi, b + R \sin \phi \sin \psi, c + R \cos \psi)$$

beschreiben. Diese Parametrisierung ist überall stetig differenzierbar und injektiv ist sie auf der offenen Teilmenge $U := (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ für die auch $A = \bar{U}$ gilt. Die Tangentialvektoren sind

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -R \sin \phi \sin \psi \\ R \cos \phi \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = \begin{pmatrix} R \cos \phi \cos \psi \\ R \sin \phi \cos \psi \\ -R \sin \psi \end{pmatrix}$$

und da für $0 < \psi < \pi$ stets $\sin \psi > 0$ ist, sind diese für $(\phi, \psi) \in U$ immer linear unabhängig. Damit ist F ein Flächenstück.

Jetzt wollen wir einen Zylinder F mit Radius $R > 0$ und der Einfachheit halber mit Symmetrieachse $x = y = 0$ behandeln. Da wir nur kompakte Flächenstücke betrachten schränken wir noch die z -Koordinaten durch $a \leq z \leq b$ ein. Dann wird F ein Flächenstück mit der Parametrisierung

$$\varphi : A := [0, 2\pi] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3; (\phi, z) \mapsto (R \cos \phi, R \sin \phi, z),$$

wobei diesmal $A = \bar{U}$ mit $U = (0, 2\pi) \times (a, b)$ ist. Die Tangentenvektoren sind

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -R \sin \phi \\ R \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also immer linear unabhängig. Damit ist auch der Zylinder F ein Flächenstück. Etwas allgemeiner können wir zu gegebener Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Mantelfläche des Rotationskörpers R_f aus §1.4 betrachten, also die Fläche

$$F_f := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b, x^2 + y^2 = f(z)^2\}.$$

Diese sollte ein Flächenstück parametrisiert durch

$$\varphi : [0, 2\pi] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3; (\phi, z) \mapsto (f(z) \cos \phi, f(z) \sin \phi, z)$$

sein. Dies ist nicht injektiv wenn $f(z) = 0$ wird, also sollten wir sogar $f(z) > 0$ für alle $a < z < b$ annehmen. Die Tangentialvektoren sind

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -f(z) \sin \phi \\ f(z) \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \begin{pmatrix} f'(z) \cos \phi \\ f'(z) \sin \phi \\ 1 \end{pmatrix},$$

also wieder linear unabhängig. Damit ist auch die Rotationsfläche F_f ein Flächenstück. Als ein letztes Beispiel nehmen wir den Graphen einer Funktion. Seien hierzu eine offene, beschränkte und Jordan-messbare Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Der Graph von f ist dann die Menge

$$G_f := \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \bar{U}\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

und auch dies ist wieder ein Flächenstück diesmal mit der Parametrisierung

$$\varphi : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3; (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y)).$$

Die Tangentenvektoren

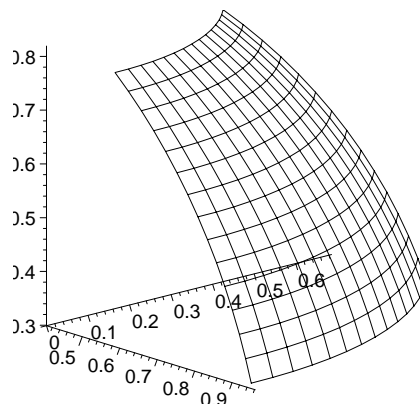
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

sind offenbar wieder linear unabhängig.

5.2 Flächenintegrale erster Art

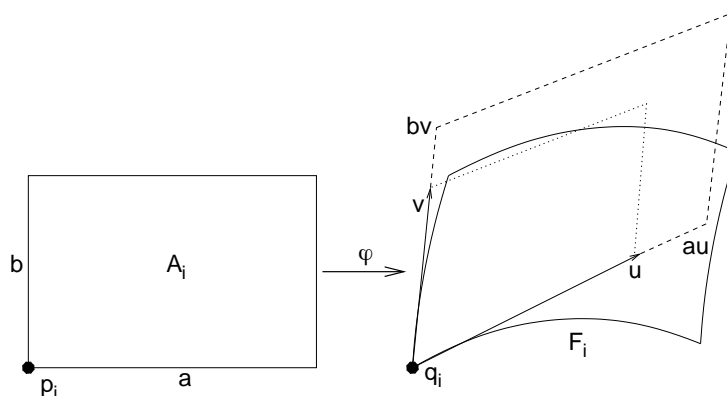
Flächenintegrale erster Art sind die direkte Verallgemeinerung der Kurvenintegrale erster Art auf den zweidimensionalen Fall, also auf Flächen. Gegeben sei ein Flächenstück $F \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrisiert durch $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$. Weiter sei auf F eine stetige Funktion $\varrho : F \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Wir können beispielsweise an eine Massendichte denken wenn wir uns F als die mathematische Beschreibung einer dünnen, gebogenen Platte vorstellen oder an eine Ladungsdichte auf einer ebensolchen Platte. Das Flächenintegral $\int_F \varrho(p) d\sigma(p)$ soll dann wieder der „Gesamtwert“ der betrachteten Größe über das ganze Flächenstück sein, also in unseren beiden Beispielsituationen die Masse beziehungsweise die Ladung von F .

Die Überlegung wie $\int_F \varrho(p) d\sigma(p)$ zu berechnen, beziehungsweise überhaupt exakt zu definieren, ist, ist wieder völlig analog zur Integraldefinition in §1 und der Definition des skalaren Kurvenintegrals in §3.1. Wir denken uns das Flächenstück F in viele kleine Stücke F_1, \dots, F_r zerlegt, die wir durch eine entsprechende Zerlegung $A = A_1 \cup \dots \cup A_r$ des Parameterbereichs A mit $F_i = \varphi(A_i)$ für $i = 1, \dots, r$ angeben. Nehmen wir die Dichte ϱ auf jedem Teilstück F_i als näherungsweise konstant an, so können wir $q_i \in F_i$ wählen und haben $\varrho(q) \approx \varrho(q_i)$ für $q \in F_i$. Dabei können wir $q_i = \varphi(p_i)$ mit $p_i \in A_i$ schreiben. Der Beitrag des Flächenstücks F_i zum Integral ist damit näherungsweise



Beitrag von $F_i \approx \varrho(q_i) \cdot \text{Flächeninhalt von } F_i = \varrho(\varphi(p_i)) \cdot \text{Flächeninhalt von } F_i$.

Hier tritt im Vergleich zu §1 eine kleine Komplikation auf, während wir damals für F_i einfach ein Rechteck nehmen konnten und keine Probleme mit dem Flächeninhalt hatten, ist in der jetzt behandelten Situation F_i ein normalerweise gebogenes Flächenstück im Raum und es ist nicht mehr klar was der Flächeninhalt sein wird. Genau dieselbe Schwierigkeit trat auch schon beim skalaren Kurvenintegral in §3.2 auf, und dort hatten wir das ganze gelöst indem ein Teilstück der Kurve durch die Verbindungsgerade der beiden Endpunkte angenähert wurde. Genauso werden wir jetzt auch unser Teilstück F_i durch eine Menge von einfacher geometrischer Gestalt annähern. Dabei können wir der Einfachheit halber annehmen, das alles so eingerichtet ist das A_i ein achsenparalleles Rechteck mit linker unterer Ecke in p_i ist. Die Seitenlängen dieses Rechtecks seien mit $a, b > 0$ bezeichnet.



Jetzt müssen wir uns an die Einführung der totalen Ableitung in §9.4 im letzten Semester erinnern. Dort hatten wir die Ableitung als die lineare Approximation einer Funktion eingeführt, und damit ist die Abbildung φ auf dem Rechteck A_i wegen $\varphi(p_i) = q_i$ näherungsweise gleich

$$\varphi \left(p_i + \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \right) \approx q_i + t \frac{\partial \varphi}{\partial x}(p_i) + s \frac{\partial \varphi}{\partial y}(p_i),$$

wobei wir das Rechteck A_i mit $0 \leq t \leq a$, $0 \leq s \leq b$ durchlaufen. Schreiben wir $u := \partial\varphi/\partial x(p_i)$, $v := \partial\varphi/\partial y(p_i)$ für die beiden Tangentialvektoren, so wird dies zu $\varphi(p_i + (t, s)) \approx q_i + tu + sv$. Somit ist das Flächenstück

$$F_i = \varphi(A_i) = \left\{ \varphi \left(p_i + \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \right) \mid 0 \leq t \leq a, 0 \leq s \leq b \right\} \\ \approx \{q_i + tu + sv \mid 0 \leq t \leq a, 0 \leq s \leq b\},$$

und die rechte Seite ist hier gerade das von den Vektoren $a \cdot u$ und $b \cdot v$ bei q_i aufgespannte Parallelogramm. Damit wird auch der Flächeninhalt von F_i näherungsweise gleich dem Flächeninhalt dieses Parallelogramms. Wie wir schon im ersten Semester in §10.3 bei der Einführung des Vektorprodukts gesehen hatten, ist die Fläche unseres Parallelogramms gleich der Länge des Vektorprodukts der beiden linear unabhängigen Vektoren au und bv , also

$$\text{Flächeninhalt von } F_i \approx |(au) \times (bv)| = ab|u \times v| = \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x}(p_i) \times \frac{\partial\varphi}{\partial y}(p_i) \right| \cdot \text{vol}(A_i)$$

da ab ja auch die Fläche des Rechtecks A_i ist. Der Beitrag von F_i zum Flächenintegral ist also im wesentlichen gleich dieser Zahl mit $\varrho(\varphi(p_i))$, und summieren wir alle Teile unserer Zerlegung F_1, \dots, F_r von F auf, so wird

$$\int_F \varrho(p) d\sigma(p) \approx \sum \varrho(\varphi(p_i)) \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x}(p_i) \times \frac{\partial\varphi}{\partial y}(p_i) \right| \cdot \text{vol}(A_i).$$

Auf der rechten Seite steht hier jetzt aber eine Riemansumme des Integrals

$$\int_A \varrho(\varphi(x, y)) \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) \right| d(x, y),$$

und lassen wir die Zerlegung von F in F_1, \dots, F_r immer feiner werden, so wird auch die Zerlegung von A in A_1, \dots, A_r immer feiner, also konvergieren die Riemansummen auf der rechten Seite gegen das eben hingeschriebene Integral, und zugleich verschwindet der Näherungsfehler im Grenzwert. Das Flächenintegral muss also wie folgt definiert werden:

Definition 5.2: Seien $F \subseteq \mathbb{R}^3$ ein durch $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrisiertes Flächenstück und $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Das skalare Flächenintegral von f über F ist dann

$$\int_F f d\sigma := \int_F f(p) d\sigma(p) := \int_A f(\varphi(x, y)) \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) \right| d(x, y).$$

Wie beim Kurvenintegral spricht man oft auch von einem Flächenintegral erster Art. Wie wir für Kurven in §3.Satz 3 festgestellt hatten, hängt das skalare Kurvenintegral nicht von der speziellen Parametrisierung der Kurve ab, und genauso ist auch das eben definierte skalare Flächenintegral unabhängig von der Parametrisierung φ . Insbesondere ist damit die Schreibweise $\int_F f d\sigma$, in der φ ja schon weggelassen wurde, gerechtfertigt. Diese Tatsache werden wir hier nicht beweisen, und wollen sie im folgenden einfach glauben.