CAU Kiel
Mathematisches Seminar/PerLe
Dr. Alexander Ullmann

Vorkurs Mathematik: Arbeitsblatt 2

Aufgabe 2.1

Kürzen Sie die folgenden Brüche (**ohne** Zuhilfenahme elektronischer Hilfsmittel). Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Bruch definiert ist.

a) $\dfrac{64}{24}$,

b) $\dfrac{63a^2b}{14ab^2}$,

c) $\dfrac{3(x^2-y^2)}{6y-6x}$,

d) $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{3a-3b}$,

e) $\dfrac{63a^2b^2-9ab}{18ab+27a^2b^2}$,

f) $\dfrac{1+\frac{1-n}{n(n+3)}}{n+1}$,

g) $\dfrac{q^3-1}{q-1}$,

h) $\dfrac{\frac{a}{1-a}+\frac{a+1}{a}}{\frac{a-1}{a}-\frac{a}{a+1}}$.

Aufgabe 2.2

Berechnen Sie die folgenden Brüche (**ohne** Zuhilfenahme elektronischer Hilfsmittel), und kürzen Sie dann so weit wie möglich. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Bruch definiert ist.

a) $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{15}$,

b) $\dfrac{1+\frac{2}{3}}{2-\frac{4}{5}}$,

c) $\dfrac{10}{7}\cdot\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{28}{3}$,

d) $\dfrac{x}{-x-2y}+\dfrac{y}{x+2y}$,

e) $\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{4}$,

f) $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}:\dfrac{a+b}{a-b}$,

g) $\dfrac{3a}{6ab}-\dfrac{7b}{3a}+\dfrac{2ab}{4}$,

h) $\dfrac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{1-x^2}$.

Aufgabe 2.3

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen, und geben Sie die Lösungsmenge an.

a) $4x+3\leq 2(x-6)$,

b) $\frac{x-1}{2}\geq\frac{1-x}{3}$,

c) $4(1-x)+3(x+2)<8$,

d) $3x-1\leq 2(x-3)-(2-x)$,

e) $9x\geq\frac{3(6x-1)}{2}$,

f) $7x\leq\frac{3(x-1)}{-2}$.

Aufgabe 2.4

Welche Ungleichungen sind richtig/falsch, bzw. für welche Werte a sind sie erfüllt?

a) $3^{-\frac{1}{2}}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$,

b) $(1+a)^2\leq 1+2a,\quad a\in\mathbb{R}$,

c) $a^2>2,\quad a\in\mathbb{Z}$,

d) $\left(\dfrac{1+a}{a}\right)>\left(\dfrac{a}{a-1}\right),\quad a\in\mathbb{R},\, a>1$.

Aufgabe 2.5

Beweisen Sie die folgende Aussage:

$\forall\, y\in\mathbb{R}\,\exists\, x\in\mathbb{R}_{>0}\,:\, y=x-\frac{1}{x}$.

Aufgabe 2.6
Zeigen Sie, daß das Quadrat jeder ungeraden Zahl wieder ungerade ist.

Aufgabe 2.7
Seien A, B Mengen. Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \cap B = A) \Leftrightarrow (A \backslash B = \emptyset).$$

Zum Abschluß eine Aufgabe zum Grübeln! Versuchen Sie dennoch, auch einen formalen Beweis herzuleiten.

Aufgabe 2.8
Sei $n \in \mathbb{N}$ und M eine $(n+1)$-elementige Teilmenge von $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Zeigen Sie, daß $a, b \in M$ mit $a \neq b$ und a teilt b existieren.

Hierbei heißt „a teilt b“, daß ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $k \cdot a = b$.