

## Vorkurs Mathematik: Arbeitsblatt 3

---

### Aufgabe 3.1

Berechnen bzw. vereinfachen Sie:

- a)  $2^{-4}$ ,                      b)  $(3^6)^{\frac{1}{12}}$ ,                      c)  $3^{10} \cdot 3^{-8}$ ,                      d)  $2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^2$ ,  
e)  $(-\frac{1}{3})^3$ ,                      f)  $(-32)^{\frac{1}{5}}$ ,                      g)  $\sqrt[2]{\sqrt{125}}$ ,                      h)  $\left(\sqrt[3]{a^{\frac{1}{4}}\sqrt{8b}}\right)^4$ ,  
i)  $\frac{\sqrt[3]{x^5y^4}}{\sqrt[4]{16x^2y^{-6}}}$ ,                      j)  $\sqrt[8]{a^2b \cdot \sqrt[4]{b^{12}}}$ ,                      k)  $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ ,                      l)  $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ .

### Aufgabe 3.2

Machen Sie die Nenner der folgenden Brüche rational. Geben Sie Bedingungen an die Parameter an, damit die Ausdrücke definiert sind.

- a)  $\frac{1}{\sqrt[5]{a^7}}$ ,  $a \neq 0$ ,                      b)  $\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$                       c)  $\frac{ab}{c\sqrt{b}}$ ,  
d)  $\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$ ,                      e)  $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ ,                      f)  $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ,  
g)  $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ ,                      h)  $\frac{60}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ ,                      i)  $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ .

### Aufgabe 3.3

Wenden Sie die Definition des Logarithmus an und ermitteln Sie  $x$ .

- a)  $2^x = 64$                       b)  $64^x = 64$ ,                      c)  $3^x = 81$ ,                      d)  $2^x = \frac{1}{8}$ ,  
e)  $3^x = \frac{1}{3}$ ,                      f)  $10^x = 0,01$ ,                      g)  $5^x = 0,008$ ,                      h)  $8^x = 4$ ,  
i)  $\log_x 9 = 2$ ,                      j)  $\log_x 243 = 5$ ,                      k)  $\log_x 1024 = 10$ ,                      l)  $\log_x \frac{1}{16} = 4$ ,  
m)  $\log_x 4 = \frac{1}{2}$ ,                      n)  $\log_x \frac{1}{32} = -5$ ,                      o)  $\log_x \frac{1}{5} = -1$ ,                      p)  $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ ,  
q)  $\log_7 49 = x$ ,                      r)  $\log_5 1 = x$ ,                      s)  $\log_7 \sqrt[6]{49} = x$ ,                      t)  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = x$ ,  
u)  $\log_{10} 10^6 = x$ ,                      v)  $\log_{10} 1 = x$ ,                      w)  $\log_{10} \sqrt[3]{100} = x$ ,                      x)  $\log_{10} \sqrt{\frac{1}{10}} = x$ ,  
y)  $\log_3 x = 4$ ,                      z)  $\log_{10} x = -3$ .

Und noch ein paar!

- a)  $\log_{10} x = 0$ ,                      b)  $\log_{\frac{1}{2}} x = -5$ ,                      c)  $\log_e x = \frac{1}{3}$ ,                      d)  $\log_5 x = -2$ .

### Aufgabe 3.4

Wenden Sie die Potenz- und Logarithmengesetze an um die folgenden Terme umzuformen, und legen Sie jeweils den Gültigkeitsbereich von  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  fest.

- a)  $\ln \frac{a^2b^3}{c}$ ,                      b)  $\ln(a^2 - b^2)$ ,                      c)  $\ln(a^2 + b^2)$ ,  
d)  $\ln(a + b)^2$ ,                      e)  $\ln(a^2b^2)$ ,                      f)  $\ln \frac{ab}{a+b}$ ,  
g)  $\ln \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ ,                      h)  $\ln \frac{a^2b^2}{(a-b)^2}$ ,                      i)  $\ln \frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a^5b^3}}$ .

j)  $\ln \left( \frac{a^3}{b} \right)^{\frac{5}{4}},$

k)  $\ln \frac{b}{a} - \ln \frac{a}{b},$

l)  $\ln 2a + 2 \ln b + 2 \ln 2c,$

m)  $2 \ln a - 4 \ln b,$

n)  $\frac{1}{2} \ln a + 2 \ln c - \frac{1}{3}(\ln b^3 + \ln a^{\frac{3}{2}}),$

o)  $\frac{1}{3}(\ln a + 3 \ln b) - \frac{1}{2}(4 \ln c - 2 \ln d),$

p)  $\frac{1}{2} \ln(a^2 - ab + b^2) + \frac{1}{2} \ln(a + b),$

q)  $-3 \ln a - \frac{1}{3} \ln b,$

r)  $\ln \frac{a}{b} + \ln(ab) - 2 \ln(a - b).$

**Aufgabe 3.5**

(Vergleiche **Aufgabe 3.4 p)**) Zeigen Sie, daß für alle  $a, b \in \mathbb{R}$

$$a^2 - ab + b^2 \geq 0$$

gilt, mit  $>$ , falls  $a$  und  $b$  nicht beide Null sind.

**Aufgabe 3.6**

Sei  $0 < \varepsilon < 1$ . Ermitteln Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen. Geben Sie diese in der Intervallschreibweise an.

a)  $|x - 1| < \varepsilon,$

b)  $|x + 3| > \varepsilon,$

c)  $|x^2 - 1| \leq \varepsilon,$

d)  $|x^2 - 2| \geq \varepsilon.$

**Aufgabe 3.7**

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ .

a) Zeigen Sie:  $|a - b| = |b - a|.$

b) Zeigen Sie die *umgekehrte Dreiecksungleichung*  $||a| - |b|| \leq |a - b|.$