CAU Kiel
Mathematisches Seminar/PerLe
Dr. Alexander Ullmann

Vorkurs Mathematik: Arbeitsblatt 5

Aufgabe 5.1

a) Sei $F := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 1\}$. Finden Sie eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, deren Graph gleich F ist.

b) Ist der Einheitskreis $F := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ der Graph einer Funktion?

c) Ist der Nenner eines Bruchs eine Funktion des Bruchs, wird also durch

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \frac{p}{q} \mapsto q$$

eine Funktion definiert?

Aufgabe 5.2

Schreiben Sie die durch die folgenden Abbildungsvorschriften definierten Funktionen als Verkettung von möglichst einfachen elementaren Funktionen, und bestimmen Sie hiermit jeweils den maximalen Definitionsbereich. (*Hinweis: wir zählen hier auch die Funktion* $\mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ *zu den elementaren Funktionen.)*

a) $x \mapsto \sqrt{\log x}$,

b) $x \mapsto \dfrac{7}{x^3 - 7}$,

c) $x \mapsto \sqrt{5 - \sqrt{x+3}}$,

d) $x \mapsto \log(16 - 2^x)$.

Aufgabe 5.3

Die Funktion f sei durch eine der folgenden Abbildungsvorschriften $x \mapsto f(x)$ gegeben. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D_{\max}(f)$ und geben Sie den zugehörigen maximalen Bildbereich $B_{\max}(f)$ an.

a) $x \mapsto \log x^2$,

b) $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$,

c) $x \mapsto \sqrt[3]{x-2}$

d) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$,

e) $x \mapsto 1 + e^x$,

f) $x \mapsto \sqrt{1 - e^{2x}}$

g) $x \mapsto \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{1-x}}}$,

h) $x \mapsto x e^{\sqrt{x}}$,

i) $x \mapsto \dfrac{1}{1 - \log x}$.

Aufgabe 5.4

Bestimmen Sie für die zu den folgenden Vorschriften gehörenden Funktionen f jeweils den maximalen Definitionsbereich $\mathrm{Def}(f)$, und untersuchen sie f auf Monotonie und Symmetrieeigenschaften. Skizzieren Sie den Kurvenverlauf.

a) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 1}$,

b) $x \mapsto \ln x^2$,

c) $x \mapsto x - 5$,

d) $x \mapsto \dfrac{1}{x - 1}$,

e) $x \mapsto \ln(x - 1)$,

f) $x \mapsto e^{-x^2}$.