

Vorkurs Mathematik: Arbeitsblatt 7

Aufgabe 7.1

Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen, und geben Sie jeweils Real- und Imaginärteil an.

a) $(1 + i)^2$,

b) $\frac{1}{2 - i}$,

c) $\frac{1 - 2i}{1 + 3i}$,

d) $(5 - i)(6 - i) + \frac{5 - i}{6 - i}$,

e) $(1 - i)^{16}$,

f) $\left(\frac{2 + i}{3 - 2i}\right)^2$.

Aufgabe 7.2

Zeigen Sie, daß für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$,

b) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$,

c) $|\bar{z}| = |z|$,

d) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

Aufgabe 7.3

Beweisen Sie die sogenannte *Parallelogramm-Identität*:

$$\forall z, w \in \mathbb{C} : |z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

Aufgabe 7.4

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von \mathbb{C} in der Gaußschen Zahlenebene.

a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < \operatorname{Re}(iz) \leq 3\}$,

b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1 + i| = |z - 3 - 3i|\}$,

c) $M_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) \leq 1\}$,

d) $M_4 := \{z \in \mathbb{C} \mid |2z + 4i - 6| \leq 8\}$.

Aufgabe 7.5

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen.

a) $z^2 + z + 1 = 0$,

b) $2z^2 - 4z + 1 = i\sqrt{3}$,

c) $z^3 + 3z^2 + 5z + 3 = 0$,

d) $z^3 - 6iz^2 - 11z + 6i = 0$.

Aufgabe 7.6

Bestimmen Sie eine komplexe Zahl $w \in \mathbb{C}$ so, daß die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto w \cdot z$ in der Gaußschen Zahlenebene die Drehung um 30° gegen den Uhrzeigersinn beschreibt.

Aufgabe 7.7

Bestimmen Sie die komplexen dritten Einheitswurzeln, also diejenigen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 = 1$, und geben Sie jeweils Real- und Imaginärteil an.