

Vorkurs Mathematik: Lösungsvorschläge/-skizzen zu den Arbeitsblättern 1 - 4

Anmerkungen zu den Lösungsvorschlägen

Trotz einmaliger Bedenken, die ich vielen Studierenden, die nachgefragt haben, erläutert habe, stelle ich an dieser Stelle *Lösungsvorschläge* zur Verfügung. Die Bezeichnung „-vorschläge“ ist dabei mit Bedacht gewählt, da es sich im folgenden Sinn nicht um „Musterlösungen“ handelt:

- Auch wenn ich mir beim Notieren der Lösungen große Mühe gebe, kann ich keine 100-prozentige Fehlerfreiheit garantieren, insbesondere Schreib-/Tippfehler lassen sich kaum vermeiden.
- Ich erhebe auf keinen Fall den Anspruch, daß meine Lösungsvorschläge die „bestmöglichen“, also eine mustergültige Lösung darstellen. Es gibt in vielen Fällen bestimmt noch andere Möglichkeiten, die jeweilige Aufgabe zu lösen, ggf. auch deutlich elegantere, und ich präsentiere hier nur einen Vorschlag.

Außerdem ist vor allem in Hinblick auf Lösungen zu den Theorie-Aufgaben folgendes zu beachten:

- Bei den Lösungen zu Beweis-Aufgaben handelt es sich um formale Beweise, die in erster Linie logisch korrekt ausgeführt sind. Damit stellen diese Lösung die letzte Station nach einer langen Bearbeitung der Aufgabe dar, auch wenn sich der Weg bis hierhin unter Umständen in der Lösung kaum oder gar nicht mehr wiederfindet.
- Wie man auf solche Lösungen kommt, erfahren Sie hier also im allgemeinen nicht! Dafür haben Sie aber genug andere Möglichkeiten, wie das Tutorium oder die Übungsgruppen.
- Bei den Rechenaufgaben habe ich an vielen Stellen nur die Ergebnisse und nicht mehr die detaillierten Rechenwege angegeben.
- Außerdem sind die Lösungen an vielen Stellen nur Skizzen, und keine sauber ausformulierten Lösungen!

Schließlich hoffe ich, Sie lassen sich durch das Vorliegen dieser Lösungen nicht dazu verleiten, Ihr eigenes Training an den Übungsaufgaben zu vernachlässigen, daher empfehle ich noch zusätzlich:

- Schauen Sie niemals in die Lösungen, wenn Sie nicht zuvor selbst versucht haben, die Aufgaben eigenständig zu lösen!
- Geben Sie bei diesen Versuchen nicht zu früh auf, in dem Sie vorzeitig in den Lösungen nachschlagen – sie verhindern dadurch den gewünschten Lerneffekt!

Wie bereits oben erwähnt, kann ich trotz sorgfältiger Überprüfung der Lösungen nicht ausschließen, daß sich irgendwo noch Fehler befinden. Falls Sie also Fehler oder Unklarheiten in irgendeiner Form finden, zögern Sie bitte nicht, mich zu kontaktieren, damit ich entsprechendes korrigieren kann.

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1.1

Wahre Aussagen sind zum Beispiel:

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{C}, \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{D}, \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{E}, \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{F}, \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{A}.$$

Weitere wahre Aussagen: $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{F}, \dots$

Aufgabe 1.2

Die Frage ist unter den angegebenen Umständen nicht beantwortbar. Es handelt sich hierbei um das bekannte „Russellsche Paradoxon“, welches von Russell um 1900 entdeckt und publiziert wurde. Warum es sich um ein Paradoxon handelt, sieht man folgendermaßen ein: Geht man davon aus, daß der Barbier sich selbst rasiert, so gehört er zu den Männern die vom Barbier rasiert werden – per Definition rasiert er sich dann aber nicht selbst. Geht man hingegen davon aus, daß der Barbier sich nicht selbst rasiert, so gehört er zu der Gruppe von Männern, die sich nicht selbst rasieren, also wird er vom Barbier rasiert und damit rasiert er sich doch selbst.

In dem in der Vorlesung präsentierten logischen Kalkül haben wir es mit folgender Situation zu tun:

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \neg \mathcal{A}) \wedge (\neg \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}), \quad \text{und dies ist gleichbedeutend mit } (\mathcal{A} \Leftrightarrow \neg \mathcal{A}),$$

wobei \mathcal{A} als die Aussage „Der Barbier rasiert sich selbst“ aufzufassen ist. Dabei ist $\mathcal{A} \Leftrightarrow \neg \mathcal{A}$ keine Aussage im mathematischen Sinn, da ihr kein Wahrheitsgehalt zugeordnet werden kann!

Aufgabe 1.3

- a) Es ist $A = \{x \mid x \text{ ist eine Haupthimmelsrichtung}\}$. Die Menge B besteht offenbar aus den ungerade natürlichen Zahlen, die kleiner als 40 sind. Eine natürliche Zahl n ist genau dann ungerade, wenn sie von der Gestalt $n = 2k - 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist. Dies ergibt:

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 40, \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k - 1\}.$$

- b) Zur Menge C : In C liegen diejenigen Quadratzahlen $n = k^2 = (-k)^2$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $|k| \leq 7$, also ist

$$C = \{0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}.$$

Zur Menge D : Definiere die Hilfsmenge $E := \{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \mid \frac{2}{k} \in \mathbb{Z}\}$, dann gilt offenbar $E = \{-2, -1, 1, 2\}$. Die Menge D besteht nun genau aus den Zahlen $\frac{1}{3k}, k \in E$, also ist $D = \{-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\}$.

Aufgabe 1.4

- a) Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann eine Quadratzahl, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = k^2$, die gesuchte Menge läßt sich also schreiben als $Q := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : n = k^2\}$.
- b) Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Forderung „höchstens drei“ zu formulieren; eine sieht so aus: Definiere $Q_0 := Q \cup \{0\}$, dann läßt sich die gesuchte Menge schreiben als

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists a, b, c \in Q_0 : n = a + b + c\}.$$

Zum Zusatz: Da beide Mengen unendlich sind, können Sie *nicht* in aufzählender Darstellung notiert werden!

Aufgabe 1.5

- a) Bitte beachten Sie, daß es bei der Übertragung mathematischer Sachverhalte auf die sprachliche Ebene niemals nur eine Möglichkeit gibt. Diskutieren Sie weitere, aber achten Sie bei diesen auf eine korrekte Sprache.
- „Es existiert (mindestens) ein x aus X so, daß für alle y aus Y die Aussage $\mathcal{F}(x, y)$ wahr ist.“
- „Für (mindestens) ein x aus X existiert ein y aus Y mit $\mathcal{F}(x, y)$.“
- „Für alle x aus X existiert ein y aus Y (welches in der Regel von x abhängt) so, daß $\mathcal{F}(x, y)$ gilt.“
- „Für alle x aus X und y aus Y gilt $\mathcal{F}(x, y)$.“
- b) „Es gibt einen Teilnehmer diese Vorkurses, der alle Aufgaben eigenständig gelöst hat.“
- „Mindestens ein Teilnehmer hat eine Aufgabe eigenständig gelöst.“
- „Alle Teilnehmer haben mindestens eine Aufgabe (welche vom Teilnehmer abhängt) eigenständig gelöst.“
- „Alle Teilnehmer haben alle Aufgaben eigenständig gelöst.“

Aufgabe 1.6

Diese Aufgabe soll deutlich machen, daß die Reihenfolge der Quantoren wichtig ist und durch das Vertauschen i.A. eine andere Aussage entsteht.

Zunächst zur Aussage $(\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0)$: Sei $x \in \mathbb{Z}$. Setze $y := -x$, dann ist $y \in \mathbb{Z}$ das additive *inverse Element* zu x , dessen Existenz die Lösbarkeit von Gleichungen der Form $a + x = b$ in \mathbb{Z} garantiert (Näheres im Studium). Insbesondere ist diese Aussage wahr. Die Negierung der Aussage ist

$$\neg(\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0) \not\equiv (\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y \neq 0)$$

und folglich falsch.

Die Aussage $(\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y = 0)$ ist falsch. Das sieht man, in dem man zeigt, daß ihre Negation wahr ist: Es gilt

$$\neg(\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y = 0) \equiv (\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y \neq 0).$$

Wir müssen also für alle x aus \mathbb{Z} ein y aus \mathbb{Z} finden so, daß $x + y \neq 0$ ist. Sei dazu $x \in \mathbb{Z}$. Setze $y := x^2 + x + 2$, dann ist $y \in \mathbb{Z}$, und es gilt $x + y = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 \geq 1$, also insbesondere $x + y \neq 0$.

Aufgabe 1.7

Die Aussage läßt sich folgendermaßen formalisieren:

$$\forall x \in X : \left((\mathcal{E}(x) \vee \mathcal{F}(x)) \wedge \neg(\mathcal{E}(x) \wedge \mathcal{F}(x)) \right). \quad (1)$$

Die Negation dieser Aussage lautet

$$\exists x \in X : \left((\neg\mathcal{E}(x) \wedge \neg\mathcal{F}(x)) \vee (\mathcal{E}(x) \wedge \mathcal{F}(x)) \right).$$

Bemerkung: Um eine Aussage vom Typ (1) zu beweisen, zeigt man oft die folgende tautologisch äquivalente Aussage:

$$\forall x \in X : \left((\mathcal{E}(x) \vee \mathcal{F}(x)) \wedge (\mathcal{E}(x) \Rightarrow \neg\mathcal{F}(x)) \right). \quad (2)$$

Aufgabe 1.8

a) Wir definiere die Aussagen

\mathcal{A} : *Es regnet.*

\mathcal{B} : *Ich werde naß.*

\mathcal{C} : *Ich stehe draußen.*

\mathcal{D} : *Ich habe keinen Regenschirm dabei.*

\mathcal{E} : *Ich kann mich nirgendwo unterstellen.*

Dann läßt sich die gegebene Aussage formalisieren als:

$$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \wedge \mathcal{E}) \Rightarrow \mathcal{B}.$$

Die Verneinung lautet

$$\neg((\mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \wedge \mathcal{E}) \Rightarrow \mathcal{B}) \equiv \mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \wedge \mathcal{E} \wedge \neg \mathcal{B}.$$

Dies läßt sich umgangssprachlich folgendermaßen ausdrücken: „Es regnet, ich stehe draußen, habe keinen Regenschirm dabei und kann mich nirgendwo unterstellen, aber werde (trotzdem) nicht naß.“

b) Wir definiere X als die Menge aller Kursteilnehmer, und für alle $(x, y) \in X \times X$ bezeichne $\mathcal{S}(x, y)$ die Aussage „ x sieht y “. Dann läßt sich die gegebene Aussage formalisieren als:

$$\forall x \in X \exists y \in X : \left(\mathcal{S}(x, y) \wedge \mathcal{S}(y, x) \wedge (\exists z \in X : \neg \mathcal{S}(y, z)) \right).$$

Die Verneinung lautet

$$\exists x \in X \forall y \in X : \left(\neg \mathcal{S}(x, y) \vee \neg \mathcal{S}(y, x) \vee (\forall z \in X : \mathcal{S}(y, z)) \right).$$

Für festes $(x, y) \in X \times X$ können wir folgende tautologische Umformung vornehmen:

$$\begin{aligned} & \left(\neg \mathcal{S}(x, y) \vee \neg \mathcal{S}(y, x) \vee (\forall z \in X : \mathcal{S}(y, z)) \right) \\ \equiv & \left(\neg(\mathcal{S}(x, y) \wedge \mathcal{S}(y, x)) \vee (\forall z \in X : \mathcal{S}(y, z)) \right) \\ \equiv & \left((\mathcal{S}(x, y) \wedge \mathcal{S}(y, x)) \Rightarrow (\forall z \in X : \mathcal{S}(y, z)) \right). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die folgende umgangssprachlich Formulierung (man beachte den selben Hinweis wie zu Beginn der Lösung von Aufgabe 1.3) : „Es gibt einen Kursteilnehmer derart, daß jeder andere Kursteilnehmer der ihn ansieht und auch von ihm angesehen wird schon alle anderen Kursteilnehmer ansieht.“

Übrigens: Es läßt sich natürlich auch darüber diskutieren, wie man eine reale Situation herstellen kann, in der diese Aussage wahr ist (Zum Beispiel bei einer gerade Anzahl von Teilnehmern, indem sich je zwei direkt ansehen, und die andere nicht im direkten Blickfeld stehen).

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 2.1

- a) $\frac{64}{24} = \frac{8}{3}$, b) $\frac{63a^2b}{14ab^2} = \frac{9a}{2b}$, definiert für $a, b \neq 0$,
- c) $\frac{3(x^2 - y^2)}{6y - 6x} = \frac{3(x - y)(x + y)}{2 \cdot 3(y - x)} = -\frac{x + y}{2}$, d) $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{3a - 3b} = \frac{(a - b)^2}{3(a - b)} = \frac{a - b}{3}$,
definiert für $x \neq y$, definiert für $a \neq b$,
- e) $\frac{63a^2b^2 - 9ab}{18ab + 27a^2b^2} = \frac{9ab(7ab - 1)}{9ab(2 + 3ab)} = \frac{7ab - 1}{3ab + 2}$, definiert für $ab \notin \{0, -\frac{2}{3}\}$,
- f) $\frac{1 + \frac{1-n}{n(n+3)}}{n+1} = \frac{\frac{n^2+3n+(1-n)}{n(n+3)}}{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n(n+1)(n+3)} = \frac{n+1}{n(n+3)}$, definiert für $n \notin \{0, -1, -3\}$,
- g) $\frac{q^3 - 1}{q - 1} = \frac{(q - 1)(q^2 + q + 1)}{q - 1} = q^2 + q + 1$, definiert für $q \neq 1$,
- h) $\frac{\frac{a}{1-a} + \frac{a+1}{a}}{\frac{a-1}{a} - \frac{a}{a+1}} = \frac{\frac{a^2+(1-a^2)}{a(1-a)}}{\frac{a^2-1-a^2}{a(a+1)}} = \frac{1}{a(1-a)} \cdot \frac{a(a+1)}{-1} = \frac{a+1}{a-1}$, definiert für $a \notin \{-1, 0, 1\}$

(beachte, daß dann tatsächlich auch der Nenner im ersten Bruch ungleich 0 ist).

Aufgabe 2.2

- a) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} = \frac{30 + 15 - 10 + 6 - 5 + 2}{30} = \frac{38}{30} = \frac{19}{15}$,
- b) $\frac{1 + \frac{2}{3}}{2 - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{6}{5}} = \frac{25}{18}$, c) $\frac{10}{7} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{28}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 28}{2 \cdot 3 \cdot 7} = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$,
- d) $\frac{x}{-x - 2y} + \frac{y}{x + 2y} = \frac{-x}{x + 2y} + \frac{y}{x + 2y} = \frac{y - x}{x + 2y}$, definiert für $x \neq 2y$
- e) $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = 2$,
- f) $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} : \frac{a + b}{a - b} = \frac{a^2 + b^2}{(a - b)(a + b)} \cdot \frac{a - b}{a + b} = \frac{a^2 + b^2}{(a + b)^2}$, definiert für $|a| \neq |b|$
- g) $\frac{3a}{6ab} - \frac{7b}{3a} + \frac{2ab}{4} = \frac{3a - 14b^2 + 3a^2b^2}{6ab}$, definiert für $a, b \neq 0$,
- h) $\frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} = \frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x-x^2-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}$,
definiert für $|x| < 1$. Eine mögliche weitere Umformung an dieser Stelle ist
 $\dots = \frac{-\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x}} = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Aufgabe 2.3

Es handelt sich in allen Fällen um auf ganz \mathbb{R} definierte Ungleichungen, es gilt also $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, und wir nehmen für alle $x \in \mathbb{R}$ gültige äquivalente Umformungen der ursprünglichen Ungleichung vor.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 4x + 3 \leq 2(x - 6) \\ \Leftrightarrow & 4x + 3 \leq 2x - 12 \\ \Leftrightarrow & 2x \leq -12 - 3 \\ \Leftrightarrow & x \leq -\frac{15}{2} \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{L} = (-\infty, -\frac{15}{2}]$.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \frac{x-1}{2} \geq \frac{1-x}{3} \\ \Leftrightarrow & x - 1 \geq \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x \\ \Leftrightarrow & \frac{5}{3}x \geq \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow & x \geq 1 \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{L} = [1, \infty)$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & 4(1-x) + 3(x+2) < 8 \\ \Leftrightarrow & -4x + 3x < 8 - 4 - 6 \\ \Leftrightarrow & -x < -2 \\ \Leftrightarrow & x > 2 \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{L} = (2, \infty)$.

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & 3x - 1 \leq 2(x - 3) - (2 - x) \\ \Leftrightarrow & 3x - 2x - x \leq 1 - 6 - 2 \\ \Leftrightarrow & 0 \leq -7 \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{L} = \emptyset$.

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & 9x \geq \frac{3(6x-1)}{2} \\ \Leftrightarrow & 9x - 9x \geq -3/2 \\ \Leftrightarrow & 0 \geq -3/2 \end{aligned}$$

Dies ist für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, also ist $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad & -7x \geq \frac{3(x-1)}{2} \\ \Leftrightarrow & -14x - 3x \geq -3 \\ \Leftrightarrow & -17x \geq -3 \\ \Leftrightarrow & x \leq \frac{3}{17} \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{L} = (-\infty, \frac{3}{17}]$.

Aufgabe 2.4

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 3^{-\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow & 1 < (1/2)^{1/2} \cdot 3^{1/2} \\ \Leftrightarrow & 1 < (3/2)^{1/2} \end{aligned}$$

Die Ungleichung ist erfüllt, da $3/2 > 1$ und damit auch $(3/2)^{1/2} > 1$ gilt.

b) Es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & (1+a)^2 \leq 1+2a \\ \Leftrightarrow & 1+2a+a^2 \leq 1+2a \\ \Leftrightarrow & a^2 \leq 0, \end{aligned}$$

und dies ist genau dann erfüllt, wenn $a = 0$.

c) Es sei $a \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & a^2 > 2, \quad a \in \mathbb{Z}, \\ \Leftrightarrow & |a| > \sqrt{2} \quad a \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

und dies ist wegen $a \in \mathbb{Z}$ genau dann erfüllt, wenn $|a| \geq 2$ ist, also wenn $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ gilt.

d) Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1+a}{a}\right) > \left(\frac{a}{a-1}\right) \quad (\text{Beachte: wegen } a > 1 \text{ sind beide Nenner positiv}) \\ \Leftrightarrow & (1+a)(a-1) > a^2 \\ \Leftrightarrow & a^2 - 1 > a^2 \\ \Leftrightarrow & -1 > 0, \end{aligned}$$

was eine falsche Aussage ist. Also ist auch die ursprüngliche Ungleichung falsch, sie wird also für kein $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$ erfüllt.

Aufgabe 2.5

Behauptung. $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R}_{>0} : y = x - \frac{1}{x}$.

Beweis. Sei $y \in \mathbb{R}$. Dann ist $\frac{y^2}{4} + 1 > 0$, setze also $x := \frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1}$. Dann gilt

$$x = \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1} + \frac{y}{2} > \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1} + \frac{y}{2} = \left| \frac{y}{2} \right| + \frac{y}{2} \geq 0,$$

also ist $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} x^2 - xy - 1 &= \left(\frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1} \right)^2 - \frac{y^2}{2} - y \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1} - 1 \\ &= \frac{y^2}{4} + 2 \cdot \frac{y}{2} \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1} + \frac{y^2}{4} + 1 - \frac{y^2}{2} - y \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1} - 1 = 0, \end{aligned}$$

also ist $x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} = y$. □

Anmerkung: Es wurde ein Beweis in korrekter logischer Struktur vorgestellt – zum Auffinden der Idee, insbesondere, wie man x in Abhängigkeit von y definieren muß, löst man vorab formal die Gleichung $y = x - \frac{1}{x}$ für gegebenes $y \in \mathbb{R}$ nach x auf.

Aufgabe 2.6

Wir werden die zu beweisende Aussage zunächst formalisieren. Definiere

$$U := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k + 1\}.$$

Dann ist zu zeigen:

$$\forall n \in U : n^2 \in U.$$

Beweis. Sei $n \in U$. Wähle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2k + 1$. Setze $k' := 2k^2 + 2k$. Dann ist $k' \in \mathbb{N}_0$, und es gilt

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1,$$

also gilt nach Definition auch $n^2 \in U$. □

Aufgabe 2.7

Voraussetzung. Seien A, B Mengen.

Behauptung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) $A \subseteq B$,
- (2) $A \cup B = B$,
- (3) $A \cap B = A$,
- (4) $A \setminus B = \emptyset$.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß gilt (1) \Rightarrow (2), (2) \Rightarrow (3), (3) \Rightarrow (4) und (4) \Rightarrow (1).

(1) \Rightarrow (2): Es gelte $A \subseteq B$. Wir zeigen $A \cup B \subseteq B$ und $B \subseteq A \cup B$. Nach Definition ist klar, daß gilt $B \subseteq A \cup B$, es reicht also $A \cup B \subseteq B$ zu zeigen. Sei dazu $x \in A \cup B$.

Fall 1: $x \in A$, wegen $A \subseteq B$ folgt dann auch $x \in B$.

Fall 2: $x \in B$, dann ist nichts mehr zu zeigen.

(2) \Rightarrow (3): Es gelte $A \cup B = B$. Wir zeigen $A \cap B \subseteq A$ und $A \subseteq A \cap B$. Nach Definition ist klar, daß gilt $A \cap B \subseteq A$, es reicht also, $A \subseteq A \cap B$ zu zeigen. Sei dazu $a \in A$. Dann ist insbesondere $a \in A \cup B$, und da nach Voraussetzung gilt $A \cup B = B$, folgt damit auch $a \in B$. Also ist $a \in A \cap B$.

(3) \Rightarrow (4): Wir zeigen die Kontraposition, also $(A \setminus B \neq \emptyset) \Rightarrow (A \cap B \neq A)$. Gelte also $A \setminus B \neq \emptyset$. Wähle ein $a \in A \setminus B$, dann gilt also $a \in A$ und $a \notin B$. Also ist auch $a \notin A \cap B$, folglich gilt $A \not\subseteq A \cap B$ und somit insbesondere $A \neq A \cap B$.

(4) \Rightarrow (1): Wir zeigen wieder die Kontraposition, also $(A \not\subseteq B) \Rightarrow (A \setminus B \neq \emptyset)$. Gelte also $A \not\subseteq B$. Dann findet man ein $a \in A$ mit $a \notin B$. Folglich ist $a \in A \setminus B$, also $A \setminus B \neq \emptyset$. \square

Aufgabe 2.8

Voraussetzung. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \{1, 2, \dots, 2n\}$ mit $|M| = n + 1$.

Behauptung. Es gibt $a, b \in M$ mit $a \neq b$ und a teilt b .

Beweis. Schreibe $M = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ mit $a_i \neq a_j$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n + 1\}$ mit $i \neq j$. Wir nehmen nun für jede Zahl a_i eine teilweise Primfaktorzerlegung vor, indem wir den Faktor 2 abspalten: Zu jedem $i \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ finden wir eine Zahl $k_i \in \mathbb{N}_0$ sowie eine ungerade Zahl $u_i \in \mathbb{N}$ mit $a_i = 2^{k_i} \cdot u_i$.

Es gilt insbesondere $u_i \leq a_i \leq 2n$, also $u_i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$. Offenbar enthält $\{1, 2, \dots, 2n\}$ genau n verschiedene ungerade Zahlen, also muß es $i, j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ mit $i \neq j$ geben, für die gilt: $u_i = u_j$. Da $a_i \neq a_j$, können wir o.B.d.A. annehmen, daß $k_j > k_i$ ist, also $k := k_j - k_i \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$a_j = 2^{k_j} \cdot u_j = 2^{k+k_i} \cdot u_i = 2^k \cdot (2^{k_i} \cdot u_i) = 2^k a_i.$$

Wegen $k \in \mathbb{N}$ ist 2^k eine ganze Zahl, und per Definition gilt a_i teilt a_j . \square

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 3.1

a) $2^{-4} = \frac{1}{16}$,

d) $2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^2 = 2^{11/4}$,

g) $\sqrt[2]{\sqrt{125}} = 5^{\frac{3}{4}}$,

j) $\sqrt[8]{a^2b} \cdot \sqrt[4]{b^{12}} = a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{2}}$,

b) $(3^6)^{\frac{1}{12}} = \sqrt{3}$,

e) $(-\frac{1}{3})^3 = -\frac{1}{27}$,

h) $\left(\sqrt[3]{a^{\frac{1}{4}}\sqrt{8b}}\right)^4 = 4\sqrt[3]{ab^2}$,

k) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$,

c) $3^{10} \cdot 3^{-8} = 9$,

f) $(-32)^{\frac{1}{5}} = -2$,

i) $\frac{\sqrt[3]{x^5y^4}}{\sqrt[4]{16x^2y^{-6}}} = \frac{1}{2}\sqrt[6]{x^7y^{17}}$,

l) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$.

Aufgabe 3.2

a) Vor.: $a \neq 0$; $\frac{\sqrt[5]{a^3}}{a^2}$

d) $17 + 12\sqrt{2}$

g) $5 + 2\sqrt{6}$

b) Vor.: $a \neq 0$; $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$

e) $\frac{18 + 5\sqrt{10}}{2}$

h) $5(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{30})$

c) Vor.: $b > 0, c \neq 0$; $\frac{a\sqrt{b}}{c}$

f) $2 - \sqrt{3}$

i) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

Aufgabe 3.3

Wenden Sie die Definition des Logarithmus an und ermitteln Sie x .

a) $x = 6$

e) $x = -1$

i) $x = 3$

m) $x = 16$

q) $x = 2$

u) $x = 6$

y) $x = 81$

b) $x = 1$

f) $x = -2$

j) $x = 3$

n) $x = 2$

r) $x = 0$

v) $x = 0$

c) $x = 4$

g) $x = -3$

k) $x = 2$

o) $x = 5$

s) $x = 1/3$

w) $x = 2/3$

z) $x = \frac{1}{1000} = 0,001$

d) $x = -3$

h) $x = 2/3$

l) $x = 1/2$

p) $x = 10$

t) $x = 2$

x) $x = -1/2$

Und noch ein paar!

a) $x = 1$

b) $x = 32$

c) $x = \sqrt[3]{e}$

d) $x = 1/25$

Aufgabe 3.4

a) $a > 0, b > 0, c > 0$
 $2 \ln a + 3 \ln b - \ln c$

d) $a > -b$
 $2 \ln(a + b)$

g) $a > |b|$
 $\ln(a^2 + b^2) - \ln(a + b) - \ln(a - b)$

j) $a, b > 0$
 $\frac{5}{4}(3 \ln a - \ln b)$

l) $a, b, c > 0$
 $\ln 8ab^2c^2$

b) $a > |b|$
 $\ln(a + b) + \ln(a - b)$

e) $a > 0, b > 0$
 $2(\ln a + \ln b)$

h) $a > b > 0$
 $2(\ln a + \ln b - \ln(a - b))$

k) $a, b > 0$
 $2(\ln b - \ln a)$

m) $a, b > 0$
 $\ln \frac{a^2}{b^4}$

c) a, b nicht beide 0,
also $(a, b) \neq (0, 0)$
Logarithmengesetze nicht
anwendbar

f) $a > 0, b > 0$
 $\ln a + \ln b - \ln(a + b)$

i) $a, b > 0$
 $-(\frac{1}{2} \ln a + \ln b)$

n) $a, b, c > 0$

$\ln \frac{c^2}{b}$

p) $a + b > 0$

$\ln \sqrt{a^3 + b^3}$

r) $a > b, ab > 0$. Die zweite Bedingung ist gleichbedeutend mit: $a \neq 0, b \neq 0$, und a, b haben gleiches Vorzeichen

$\ln \left(\frac{a}{a-b} \right)^2$

o) $a, b, c, d > 0$

$\ln \frac{\sqrt[3]{abd}}{c^2}$

q) $a, b > 0$

$\ln \frac{1}{a^3 \sqrt[3]{b}}$

Anmerkung. In den obigen Lösungen wurden die Gültigkeitsbereiche so gewählt, daß die Umformungen entsprechend stimmen, und alle Ausdrücke Sinn ergeben. Der Einfachheit halber wurde dabei meist $a, b, c, d > 0$ gefordert, so daß die Umformungen entsprechend einfacher wurden. Tatsächlich handelt es sich dabei aber meistens nicht um die *maximal* möglichen Gültigkeitsbereiche: Zum Beispiel in Aufgabe a) könnte man auch nur fordern, daß $a \neq 0$ und $b \cdot c > 0$ ist. In dem Fall ist auch

$$\frac{a^2 b^3}{c} = a^2 b^2 \cdot \frac{b}{c} = |a|^2 |b|^2 \cdot \frac{|b|}{|c|} = \frac{|a|^2 |b|^3}{|c|} > 0,$$

also ist $\ln \frac{a^2 b^3}{c}$ wohldefiniert, und es gilt

$$\ln \frac{a^2 b^3}{c} = \ln \left(\frac{|a|^2 |b|^3}{|c|} \right) = 2 \ln |a| + 3 \ln |b| - \ln |c|.$$

Ähnlich kann man auch in anderen Aufgabenteilen verfahren.

Aufgabe 3.5

Zu zeigen: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a^2 - ab + b^2 \geq 0$, und im Fall $(a, b) \neq (0, 0)$ gilt $a^2 - ab + b^2 > 0$.

Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$a^2 - ab + b^2 = \underbrace{\frac{1}{2}(a-b)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{a^2}{2}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{b^2}{2}}_{\geq 0} \geq 0.$$

Gelte nun zusätzlich $(a, b) \neq (0, 0)$, dann ist $a^2 + b^2 > 0$, also auch $a^2 - ab + b^2 \geq \frac{a^2 + b^2}{2} > 0$. \square

Alternative Lösung: Folgende Lösung ist da schon etwas umständlicher, aber auch möglich:

Wir verwenden die zwei binomischen Formeln und die Tatsache, daß $(a \pm b)^2 \geq 0$ gilt. Daraus erhalten wir, daß sowohl $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (*) als auch $a^2 + b^2 \geq -2ab$ (**) gilt. Im Falle $ab \geq 0$ verwenden wir (*), andernfalls (**) und erhalten:

$$a^2 + b^2 \geq |2ab| \geq |ab| \geq ab.$$

Weitere Überlegungen zeigen:

Sind a, b beide ungleich 0, so gilt $>$ anstelle des zweiten \geq . Ist entweder a oder b gleich 0, aber nicht beide, so gilt $>$ anstelle des ersten \geq .

Zusammengefaßt gilt also, falls a, b nicht beide Null sind: $a^2 - ab + b^2 > 0$, sonst trivialerweise $a^2 - ab + b^2 = 0$.

Aufgabe 3.6

Sei $\varepsilon \in (0, 1)$.

- a) Sei $x \in \mathbb{R}$, dann gilt: $|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$
- b) Die gesuchte Menge ist in diesem Fall das Komplement der Menge aller $x \in \mathbb{R}$, welche $|x + 3| \leq \varepsilon$ erfüllen. Analog zu a) haben gilt $|x + 3| \leq \varepsilon \Leftrightarrow x \in [-3 - \varepsilon, -3 + \varepsilon]$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die gesuchte Menge ist also $\mathbb{R} \setminus [-3 - \varepsilon, -3 + \varepsilon] = (-\infty, -3 - \varepsilon) \cup (-3 + \varepsilon, \infty)$.
- c) Sei $x \in \mathbb{R}$, dann gilt zunächst

$$|x^2 - 1| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x^2 - 1 \leq \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon \leq x^2 \leq 1 + \varepsilon \stackrel{\text{warum?}}{\Leftrightarrow} \sqrt{1 - \varepsilon} \leq |x| \leq \sqrt{1 + \varepsilon}.$$

Fall 1: $x \geq 0$: Dann gilt $|x^2 - 1| \leq \varepsilon \Leftrightarrow x \in [\sqrt{1 - \varepsilon}, \sqrt{1 + \varepsilon}]$

Fall 2: $x < 0$: Dann gilt $|x^2 - 1| \leq \varepsilon \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{1 + \varepsilon}, -\sqrt{1 - \varepsilon}]$

Also ist die Lösungsmenge $[\sqrt{1 - \varepsilon}, \sqrt{1 + \varepsilon}] \cup [-\sqrt{1 + \varepsilon}, -\sqrt{1 - \varepsilon}]$.

- d) Wir lösen diese Aufgabe wieder über das Komplement und verfahren analog zu c). Die gesuchte Lösungsmenge ist dann $(-\infty, -\sqrt{2 + \varepsilon}] \cup [-\sqrt{2 - \varepsilon}, \sqrt{2 - \varepsilon}] \cup [\sqrt{2 + \varepsilon}, \infty)$

Aufgabe 3.7

Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

- a) *Zu zeigen:* Es gilt $|a - b| = |b - a|$.

Setze $x := a - b$, dann ist $b - a = -x$, es ist also zu zeigen, daß gilt $|x| = |-x|$.

Fall 1: $x \geq 0$. Dann ist nach Definition $|x| = x$, und wegen $-x \leq 0$ ist $|-x| = -(-x) = x$, also $|x| = x = |-x|$.

Fall 2: $x < 0$. Wende in diesem Fall Fall 1 auf $-x$ anstelle von x an.

- b) *Zu zeigen:* Es gilt $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Nach der Dreiecksungleichung (vgl. Vorlesung bzw. Skript) gilt

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \quad \text{und} \quad |b| = |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a| = |a - b| + |a|,$$

also $|a| - |b| \leq |a - b|$ und $|b| - |a| \leq |a - b|$. Wegen $||a| - |b|| \in \{|a| - |b|, |b| - |a|\}$ folgt damit auch $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 4.1

a) (Lösung über Bestimmung der Nullstelle durch Faktorisieren.) Wir lösen zunächst die zugehörige *Gleichung*: Durch „scharfes Hinsehen“ (oder Anwenden einer geeigneten Lösungsmethode wie quadratischer Ergänzung oder *pq*-Formel) erkennen wir $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$, also hat das quadratische Polynom $x^2 - x - 2$ die Nullstellen $-1, 2$.

Da das Vorzeichen des Vorfaktors vom Term x^2 positiv ist, ist die zugehörige Parabel nach oben geöffnet, und es gilt

$$x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 2), \text{ die gesuchte Lösungsmenge ist also } \mathbb{L} = (-1, 2).$$

(Wer mag, kann z.B. bei $x = 0$ überprüfen: $0^2 - 0 - 2 < 0 \checkmark$.)

Diese Lösung bedient sich noch teilweise der Anschauung, eine formal saubere Lösung und zugleich ein formaler Beweis der Aussage, daß die Lösungsmenge der Ungleichung gerade das Intervall $(-1, 2)$ ist, wäre zum Beispiel: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 - x - 2 = (x + 2)(x - 1)$, also

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &< 0 \\ \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) &< 0 \\ \Leftrightarrow [(x > -1) \wedge (x < 2)] \vee [(x < -1) \wedge (x > 2)] \\ \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} (x > -1) \wedge (x < 2) &\Leftrightarrow x \in (-1, 2), \end{aligned}$$

wobei in (*) verwendet wurde, daß die Aussage $(x < -1) \wedge (x > 2)$ immer falsch ist.

b) (Lösung über Bestimmung der Nullstelle durch Quadratisches Ergänzen.) Es gilt

$$x^2 - 7x + 12 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 12 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Wir lösen zunächst die zugehörige *Gleichung* $x^2 - 7x + 12 = 0$ (bestimmen also die Nullstellen des Polynoms $x^2 - 7x + 12$):

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow x - \frac{7}{2} &= \pm \frac{1}{2} \quad . \\ \Leftrightarrow x &= \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow (x = 4) \vee (x = 3) \end{aligned}$$

Die zugehörige Parabel ist nach oben geöffnet, und wir erhalten:

$$\mathbb{L} = (-\infty, 3] \cup [4, \infty) = \mathbb{R} \setminus (3, 4).$$

Auch hier geben wir wieder eine Variante für eine formal exakte Lösung ohne Verwendung der Anschauung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt nach der oben durchgeführten quadratischen Ergänzung $x^2 - 7x + 12 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, also

$$\begin{aligned}
& x^2 - 7x + 12 \geq 0 \\
\Leftrightarrow & \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq 0 \\
\Leftrightarrow & \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow & \left|x - \frac{7}{2}\right| \geq \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow & \left[\left(x \geq \frac{7}{2}\right) \wedge \left(x - \frac{7}{2} \geq \frac{1}{2}\right)\right] \vee \left[\left(x \leq \frac{7}{2}\right) \wedge \left(\frac{7}{2} - x \geq \frac{1}{2}\right)\right] \\
\Leftrightarrow & (x \geq 4) \vee (x \leq 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3] \cup [4, \infty) = \mathbb{R} \setminus (3, 4).
\end{aligned}$$

Mit den gleichen Methoden kann man analog die übrigen Lösungsmengen bestimmen:

- | | |
|--|-----------------------------|
| a) (siehe oben) | b) (siehe oben) |
| c) $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$ | d) $\mathbb{L} = [-5, 1]$ |
| e) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ | f) $\mathbb{L} = \{4\}$ |
| g) $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \{-7\}$ | h) $\mathbb{L} = \emptyset$ |
| i) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ | j) $\mathbb{L} = (-3, 7)$ |

Aufgabe 4.2

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $x + x^{-1} \geq 10$?

Für $x = 0$ ist die Ungleichung nicht definiert und für $x < 0$ offensichtlich nicht erfüllt. Sei also $x > 0$. Dann gilt:

$$x + \frac{1}{x} \geq 10 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 10x \Leftrightarrow x^2 - 10x + 1 \geq 0$$

Dem entspricht eine nach oben geöffnete Parabel. Quadratisches Ergänzen liefert die Nullstellen $5 + 2\sqrt{6}$ und $5 - 2\sqrt{6}$. Die Menge der $x \in \mathbb{R}$, für die die Ungleichung erfüllt ist, ist somit gleich $(0, 5 - 2\sqrt{6}] \cup [5 + 2\sqrt{6}, \infty)$.

Aufgabe 4.3

Machen Sie sich klar, wann Ihre Umformungen a priori lediglich eine Implikation, aber keine Äquivalenzumformung sind (\Rightarrow). Da Sie bei diesem Typ Aufgabe sowieso eine Probe machen müssen, können Sie auch jede Umformung mit \Rightarrow verbinden (wieso?).

Das Problem, daß i.a. keine Äquivalenzumformung vorliegt, kann zum Beispiel folgendermaßen auftreten: Ist $\sqrt{a} = b$, so folgt $a = b^2$ durch quadrieren, es gilt also $(\sqrt{a} = b) \Rightarrow (a = b^2)$. Ist umgekehrt $a = b^2$ vorgegeben, so folgt hieraus durch Wurzelziehen $\sqrt{a} = \sqrt{b^2} = |b|$, aber i.a. nicht $\sqrt{a} = b$.

An einigen Stellen ist es hingegen doch möglich, die Implikation durch einen Äquivalenzpfeil zu ersetzen, sofern geklärt ist, daß es sich auch tatsächlich um eine Äquivalenzumformung handelt. Wir werden dies an einigen Stellen erläutern.

a) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x} + 1 = 0$	b) $x + \sqrt{x^2 - 25} = 25$
Man sieht entweder sofort, daß diese Gleichung keine Lösung hat (Wurzeln sind nicht-negativ!), oder man formt um:	$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 25} = 25 - x$
$\Leftrightarrow \sqrt{x+6} = -(\sqrt{x} + 1)$	$\Rightarrow x^2 - 25 = (x - 25)^2$
$\Rightarrow x + 6 = x + 2\sqrt{x} + 1$	\dots
$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = -5$	$\Leftrightarrow x = 13$
$\Rightarrow x = \frac{25}{4}$	Probe: $x = 13$ ist Lösung.

Probe: $\frac{25}{4}$ ist keine Lösung!

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad & 9\sqrt{5x+2} = 25 + 4\sqrt{5x+2} \\
& \Leftrightarrow \sqrt{5x+2} = 5 \\
& \stackrel{(*)}{\Rightarrow} 5x+2 = 25 \\
& \Leftrightarrow x = \frac{23}{5}
\end{aligned}$$

Probe: $x = \frac{23}{5}$ ist Lösung.

An dieser Stelle kann man auch einfacher argumentieren: In (*) gilt auch die Rückrichtung, denn aus $5x+2 = 25$ folgt insbesondere $5x+2 \geq 0$, und Wurzelziehen ergibt

$\sqrt{5x+2} = \sqrt{25} = 5$. Also gilt in (*) sogar \Leftrightarrow .

$$\begin{aligned}
\text{d)} \quad & \sqrt{x+2} + \sqrt{2x+7} = 4 \\
& \Rightarrow x+2 + \sqrt{2x+7} = 16 \\
& \Rightarrow 2x+7 = (14-x)^2 \\
& \quad \quad \quad \dots \\
& \Rightarrow x^2 - 30x + 189 = 0 \\
& \Leftrightarrow (x-15)^2 - 15^2 + 189 = 0 \\
& \Leftrightarrow (x-15)^2 = 36 \\
& \Leftrightarrow x = \pm 6 + 15
\end{aligned}$$

Probe: $x_1 = 21$ ist keine Lösung, $x_2 = 9$ ist eine Lösung.

Aufgabe 4.4

a) Die Definitionsmenge dieser Ungleichung ist $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Sei $x \in \mathbb{D}$.

1. Fall: $x - 3 > 0$, bzw. $x > 3$. Dann gilt

$$\frac{1}{x-3} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq x-3 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 4.$$

Also ist die erste Teillösung $\mathbb{L}_1 := \mathbb{L} \cap (3, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x \geq 4\} = [4, +\infty)$.

2. Fall: $x < 3$. Dann gilt

$$\frac{1}{x-3} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq x-3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 4.$$

Also ist die zweite Teillösung

$$\mathbb{L}_2 := \mathbb{L} \cap (-\infty, 3) = \{x \in \mathbb{R} | x < 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x \leq 4\} = (-\infty, 3).$$

Insgesamt: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-\infty, 3) \cup [4, +\infty)$.

$$\text{b) } \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \mathbb{L} = (-1, \infty) \qquad \text{c) } \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \mathbb{L} = (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{7}, 1\right)$$

$$\text{d) } \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \mathbb{L} = (-\infty, -\frac{3}{8}] \cup (1, \infty)$$

Aufgabe 4.5

a) **Lösung I** via Fallunterscheidung: Sei $x \in \mathbb{R}$.

1. Fall: $2x - 3 \geq 0$ bzw. $x \geq \frac{3}{2}$. Dann gilt

$$|2x - 3| < x \Leftrightarrow 2x - 3 < x \Leftrightarrow x < 3.$$

Wir erhalten die Teillösung $\mathbb{L}_1 = [\frac{3}{2}, \infty) \cap (-\infty, 3) = [\frac{3}{2}, 3)$.

2. Fall: $x < \frac{3}{2}$. Dann gilt

$$|2x - 3| < x \Leftrightarrow 3 - 2x < x \Leftrightarrow -3x < -3 \Leftrightarrow x > 1.$$

Wir erhalten die Teillösung $\mathbb{L}_2 = [-\infty, \frac{3}{2}) \cap (1, \infty) = (1, \frac{3}{2})$.

Insgesamt ist $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (1, 3)$.

Lösung II via Quadrieren:

Da beide Seiten der Ungleichung stets nicht-negativ sind, gilt:

$$\begin{aligned} |2x - 3| < x &\iff |2x - 3|^2 < x^2 \iff (2x - 3)^2 < x^2 \iff 4x^2 - 12x + 9 < x^2 \\ &\iff x^2 - 4x + 3 < 0 \iff (x - 1)(x - 3) < 0 \iff x \in (1, 3). \end{aligned}$$

b) $\mathbb{L} = (0, 6)$

c) Hinschauen! Der Term im Betrag darf nicht Null sein: $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$

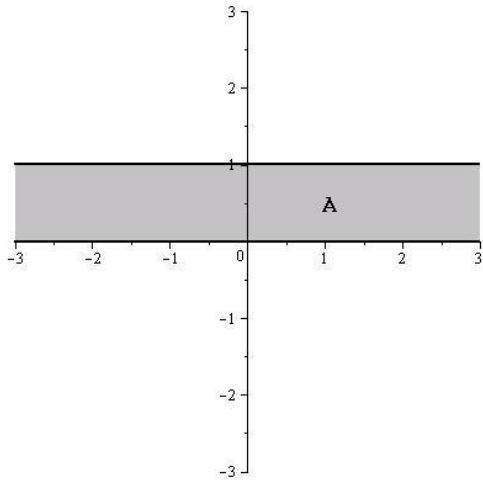
d) $x \leq 1$, aber $x \neq -4$: $\mathbb{L} = (-\infty, 1] \setminus \{-4\}$

e) $\mathbb{L} = (-1, -1/3]$

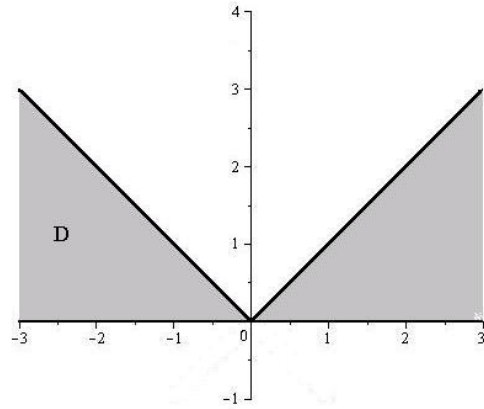
f) $\mathbb{L} = (\frac{3}{2}, \infty)$

Aufgabe 4.6

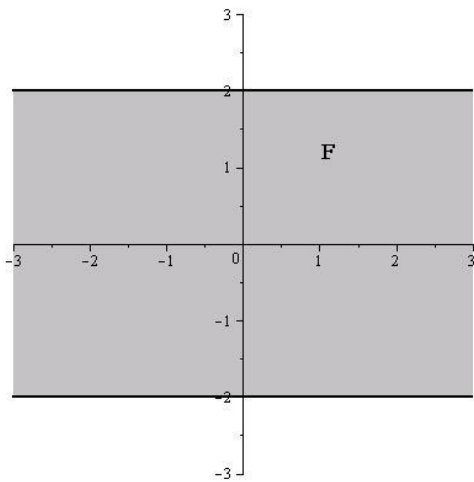
a) $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$:



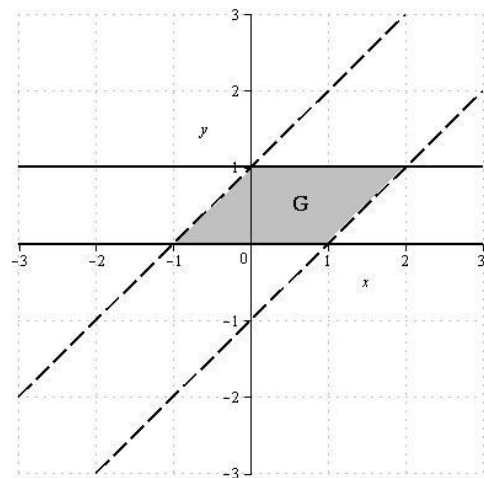
b) $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq |x|\}$:



c) $\{(x, y) \mid y^2 \leq 4\}$:

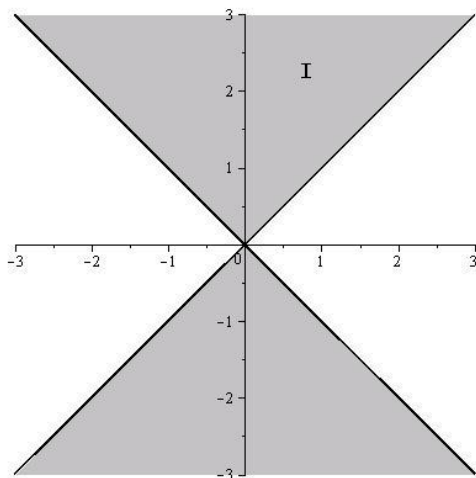


d) $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, |x - y| < 1\}$

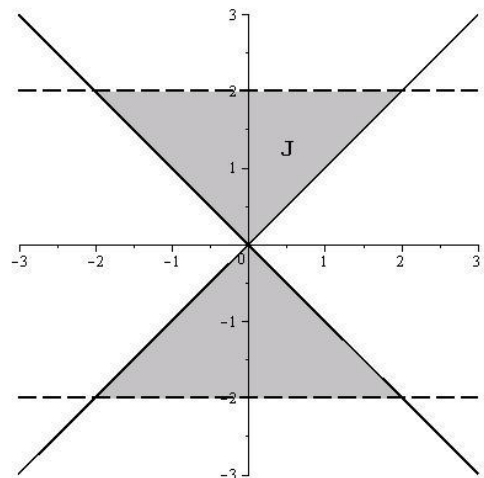


$$\begin{aligned} & |x - y| \leq 1 \\ \Leftrightarrow & -1 \leq x - y \leq 1 \\ \Leftrightarrow & (-1 \leq x - y) \wedge (x - y \leq 1) \\ \Leftrightarrow & (y \leq x + 1) \wedge (y \geq x - 1) \end{aligned}$$

e) $\{(x, y) \mid x^2 \leq y^2\}$:



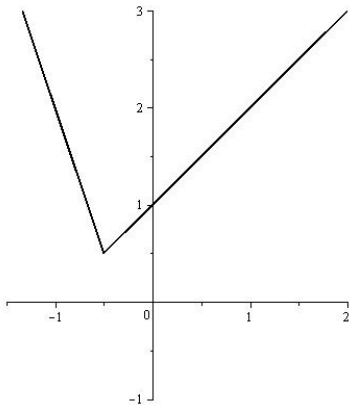
f) $\{(x, y) \mid x^2 \leq y^2 < 4\}$:



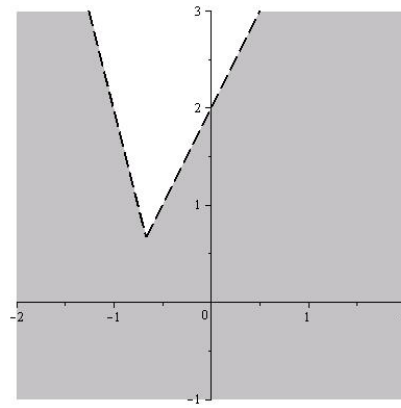
$$\begin{aligned} & x^2 \leq y^2 \\ \Leftrightarrow & |x| \leq |y| \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} |x| \leq y, & \text{falls } y \geq 0 \\ |x| \leq -y, & \text{falls } y < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} |x| \leq y, & \text{falls } y \geq 0 \\ -|x| \geq y, & \text{falls } y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 4.7

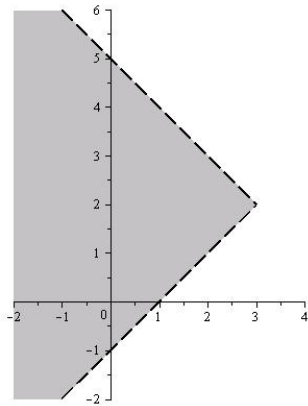
$$a) y = \begin{cases} x + 1, & \text{falls } x \geq -\frac{1}{2} \\ -3x - 1, & \text{falls } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$



$$b) y < \begin{cases} 2x + 2, & \text{falls } x \geq -\frac{2}{3} \\ -4x - 2, & \text{falls } x < -\frac{2}{3} \end{cases}$$



$$c) \begin{cases} y < -x + 5, & \text{falls } y \geq 2 \\ y > x - 1, & \text{falls } y < 2 \end{cases}$$



$$d) \begin{cases} y \leq -x + 5, & \text{falls } -3 \leq x \leq 0 \text{ und } 5 \leq y \leq 8 \\ y \geq x + 5, & \text{falls } -3 \leq x \leq 0 \text{ und } 2 \leq y < 5 \\ y \leq x + 11, & \text{falls } -6 \leq x < -3 \text{ und } 5 \leq y < 8 \\ y \geq -x - 1, & \text{falls } -6 \leq x < -3 \text{ und } 2 \leq y < 5 \end{cases}$$

