CAU Kiel
Mathematisches Seminar/PerLe
Dr. Alexander Ullmann

Vorkurs Mathematik: Lösungsvorschläge/-skizzen zu den Arbeitsblättern

Anmerkungen zu den Lösungsvorschlägen

Trotz einstmaliger Bedenken, die ich vielen Studierenden, die nachgefragt haben, erläutert habe, stelle ich an dieser Stelle Lösungs*vorschläge* zur Verfügung. Die Bezeichung „-vorschläge“ ist dabei mit Bedacht gewählt, da es sich im folgenden Sinn nicht um „Musterlösungen“ handelt:

- Auch wenn ich mir beim Notieren der Lösungen große Mühe gebe, kann ich keine 100-prozentige Fehlerfreiheit garantieren, insbesondere Schreib-/Tippfehler lassen sich kaum vermeiden.
- Ich erhebe auf keinen Fall den Anspruch, daß meine Lösungsvorschläge die „bestmöglichen“, also eine mustergültige Lösung darstellen. Es gibt in vielen Fällen bestimmt noch andere Möglichkeiten, die jeweilige Aufgabe zu lösen, ggf. auch deutlich elegantere, und ich präsentiere hier nur einen Vorschlag.

Außerdem ist vor allem in Hinblick auf Lösungen zu den Theorie-Aufgaben folgendes zu beachten:

- Bei den Lösungen zu Beweis-Aufgaben handelt es sich um formale Beweise, die in erster Linie logisch korrekt ausgeführt sind. Damit stellen diese Lösung die letzte Station nach einer langen Bearbeitung der Aufgabe dar, auch wenn sich der Weg bis hierhin unter Umständen in der Lösung kaum oder gar nicht mehr wiederfindet.
- Wie man auf solche Lösungen kommt, erfahren Sie hier also im allgemeinen nicht! Dafür haben Sie aber genug andere Möglichkeiten, wie das Tutorium oder die Übungsgruppen.
- Bei den Rechenaufgaben habe ich an vielen Stellen nur die Ergebnisse und nicht mehr die detailierten Rechenwege angegeben.
- Außerdem sind die Lösungen an vielen Stellen nur Skizzen, und keine sauber ausformulierten Lösungen!

Schließlich hoffe ich, Sie lassen sich durch das Vorliegen dieser Lösungen nicht dazu verleiten, Ihr eigenes Training an den Übungsaufgaben zu vernachlässigen, daher empfehle ich noch zusätzlich:

- Schauen Sie niemals in die Lösungen, wenn Sie nicht zuvor selbst versucht haben, die Aufgaben eigenständig zu lösen!
- Geben Sie bei diesen Versuchen nicht zu früh auf, in dem Sie vorzeitig in den Lösungen nachschlagen -– sie verhindern dadurch den gewünschten Lerneffekt!

Wie bereits oben erwähnt, kann ich trotz sorgfältiger Überprüfung der Lösungen nicht ausschließen, daß sich irgendwo noch Fehler befinden. Falls Sie also Fehler oder Unklarheiten in irgendeiner Form finden, zögern Sie bitte nicht, mich zu kontaktieren, damit ich entsprechendes korrigieren kann.

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1.1

Wahre Aussagen sind zum Beispiel:

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{C},\ \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{D},\ \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{E},\ \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{F},\ \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{A}.$$

Weitere wahre Aussagen: $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$, $\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{F}$, ...

Aufgabe 1.2

Die Frage ist unter den angegebenen Umständen nicht beantwortbar. Es handelt sich hierbei um das bekannte „Russellsche Paradoxon", welches von Russell um 1900 entdeckt und publiziert wurde. Warum es sich um ein Paradoxon handelt, sieht man folgendermaßen ein: Geht man davon aus, daß der Barbier sich selbst rasiert, so gehört er zu den Männern die vom Barbier rasiert werden – per Definition rasiert er sich dann aber nicht selbst. Geht man hingegen davon aus, daß der Barbier sich nicht selbst rasiert, so gehört er zu der Gruppe von Männern, die sich nicht selbst rasieren, also wird er vom Barbier rasiert und damit rasiert er sich doch selbst.

In dem in der Vorlesung präsentierten logischen Kalkül haben wir es mit folgender Situation zu tun:

$$\big(\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{A}\big) \ \wedge\ \big(\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}\big), \quad \text{und dies ist gleichbedeutend mit } \big(\mathcal{A} \iff \neg\mathcal{A}\big),$$

wobei $\mathcal{A}$ als die Aussage „Der Barbier rasiert sich selbst" aufzufassen ist. Dabei ist $\mathcal{A} \iff \neg\mathcal{A}$ *keine* Aussage im mathematischen Sinn, da ihr kein Wahrheitsgehalt zugeordnet werden kann!

Aufgabe 1.3

a) Es ist $A = \{x \,|\, x \text{ ist eine Haupthimmelsrichtung}\}$. Die Menge B besteht offenbar aus den ungerade natürlichen Zahlen, die kleiner als 40 sind. Eine natürliche Zahl n ist genau dann ungerade, wenn sie von der Gestalt $n = 2k - 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist. Dies ergibt:

$$B = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n < 40,\ \exists\, k \in \mathbb{N} : n = 2k - 1\}.$$

b) *Zur Menge C:* In C liegen diejenigen Quadratzahlen $n = k^2 = (-k)^2$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $|k| \leq 7$, also ist

$$C = \{0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}.$$

Zur Menge D: Definiere die Hilfsmenge $E := \big\{k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \,|\, \frac{2}{k} \in \mathbb{Z}\big\}$, dann gilt offenbar $E = \{-2, -1, 1, 2\}$. Die Menge D besteht nun genau aus den Zahlen $\frac{1}{3k}, k \in E$, also ist $D = \big\{-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\big\}$.

Aufgabe 1.4

a) Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann eine Quadratzahl, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = k^2$, die gesuchte Menge läßt sich also schreiben als $Q := \{n \in \mathbb{N} \,|\, \exists\, k \in \mathbb{N} \,:\, n = k^2\}$.

b) Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Forderung „höchstens drei" zu formulieren; eine sieht so aus: Definiere $Q_0 := Q \cup \{0\}$, dann läßt sich die gesuchte Menge schreiben als

$$\{n \in \mathbb{N} \,|\, \exists\, a, b, c \in Q_0 \,:\, n = a + b + c\}.$$

Zum Zusatz: Da beide Mengen unendlich sind, können Sie *nicht* in aufzählender Darstellung notiert werden!

Aufgabe 1.5

a) Bitte beachten Sie, daß es bei der Übertragung mathematischer Sachverhalte auf die sprachliche Ebene niemals nur eine Möglichkeit gibt. Diskutieren Sie weitere, aber achten Sie bei diesen auf eine korrekte Sprache.
„Es existiert (mindestens) ein x aus X so, daß für alle y aus Y die Aussage $\mathcal{F}(x, y)$ wahr ist.“
„Für (mindestens) ein x aus X existiert ein y aus Y mit $\mathcal{F}(x, y)$.“
„Für alle x aus X existiert ein y aus Y (welches in der Regel von x abhängt) so, daß $\mathcal{F}(x, y)$ gilt.“
„Für alle x aus X und y aus Y gilt $\mathcal{F}(x, y)$.“

b) „Es gibt einen Teilnehmer diese Vorkurses, der alle Aufgaben eigenständig gelöst hat.“
„Mindestens ein Teilnehmer hat eine Aufgabe eigenständig gelöst.“
„Alle Teilnehmer haben mindestens eine Aufgabe (welche vom Teilnehmer abhängt) eigenständig gelöst.“
„Alle Teilnehmer haben alle Aufgaben eigenständig gelöst.“

Aufgabe 1.6

Diese Aufgabe soll deutlich machen, daß die Reihenfolge der Quantoren wichtig ist und durch das Vertauschen i.A. eine andere Aussage entsteht.

Zunächst zur Aussage $\big(\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x+y = 0\big)$: Sei $x \in X$. Setze $y := -x$, dann ist $y \in \mathbb{Z}$ das additive *inverse Element zu* x, dessen Existenz die Lösbarkeit von Gleichungen der Form $a+x = b$ in $\mathbb{Z}$ garantiert (Näheres im Studium). Insbesondere ist diese Aussage wahr. Die Negierung der Aussage ist

$$\neg\big(\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0\big) \mathrel{=\!\!|\!\models} \big(\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y \neq 0\big)$$

und folglich falsch.

Die Aussage $\big(\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y = 0\big)$ ist falsch. Das sieht man, in dem man zeigt, daß ihre Negation wahr ist: Es gilt

$$\neg\big(\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y = 0\big) \mathrel{=\!\!|\!\models} \big(\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y \neq 0\big).$$

Wir müssen also für alle x aus $\mathbb{Z}$ ein y aus $\mathbb{Z}$ finden so, daß $x + y \neq 0$ ist. Sei dazu $x \in \mathbb{Z}$. Setze $y := x^2 + x + 2$, dann ist $y \in \mathbb{Z}$, und es gilt $x+y = x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 \geq 1$, also insbesondere $x + y \neq 0$.

Aufgabe 1.7

Die Aussage läßt sich folgendermaßen formalisieren:

$$\forall\, x \in X \;:\; \Big(\big(\mathcal{E}(x) \vee \mathcal{F}(x)\big) \wedge \neg\big(\mathcal{E}(x) \wedge \mathcal{F}(x)\big)\Big). \tag{1}$$

Die Negation dieser Aussage lautet

$$\exists\, x \in X \;:\; \Big(\big(\neg\mathcal{E}(x) \wedge \neg\mathcal{F}(x)\big) \vee \big(\mathcal{E}(x) \wedge \mathcal{F}(x)\big)\Big).$$

Bemerkung: Um eine Aussage vom Typ (1) zu beweisen, zeigt man oft die folgende tautologisch äquivalente Aussage:

$$\forall\, x \in X \;:\; \Big(\big(\mathcal{E}(x) \vee \mathcal{F}(x)\big) \wedge \big(\mathcal{E}(x) \Rightarrow \neg\mathcal{F}(x)\big)\Big). \tag{2}$$

Aufgabe 1.8

a) Wir definiere die Aussagen

$\mathcal{A}$: *Es regnet.*
$\mathcal{B}$: *Ich werde naß.*
$\mathcal{C}$: *Ich stehe draußen.*
$\mathcal{D}$: *Ich habe keinen Regenschirm dabei.*
$\mathcal{E}$: *Ich kann mich nirgendwo unterstellen.*

Dann läßt sich die gegebene Aussage formalisieren als:

$$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \wedge \mathcal{E}) \Rightarrow \mathcal{B}.$$

Die Verneinung lautet

$$\neg\big((\mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \wedge \mathcal{E}) \Rightarrow \mathcal{B}\big) \mathrel{=\!\!\mid\!\models} \mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \wedge \mathcal{E} \wedge \neg\mathcal{B}.$$

Dies läßt sich umgangssprachlich folgendermaßen ausdrücken: „Es regnet, ich stehe draußen, habe keinen Regenschirm dabei und kann mich nirgendwo unterstellen, aber werde (trotzdem) nicht naß.“

b) Wir definiere X als die Menge aller Kursteilnehmer, und für alle $(x, y) \in X \times X$ bezeichne $\mathcal{S}(x, y)$ die Aussage „x sieht y“. Dann läßt sich die gegebene Aussage formalisieren als:

$$\forall\, x \in X\, \exists\, y \in X \;:\; \Big(\mathcal{S}(x, y) \wedge \mathcal{S}(y, x) \wedge \big(\exists\, z \in X \;:\; \neg\mathcal{S}(y, z)\big)\Big).$$

Die Verneinung lautet

$$\exists\, x \in X\, \forall\, y \in X \;:\; \Big(\neg\mathcal{S}(x, y) \vee \neg\mathcal{S}(y, x) \vee \big(\forall\, z \in X \;:\; \mathcal{S}(y, z)\big)\Big).$$

Für festes $(x, y) \in X \times X$ können wir folgende tautologische Umformung vornehmen:

$$\begin{aligned}
& \Big(\neg\mathcal{S}(x, y) \vee \neg\mathcal{S}(y, x) \vee \big(\forall\, z \in X \;:\; \mathcal{S}(y, z)\big)\Big) \\
\mathrel{=\!\!\mid\!\models}\; & \Big(\neg\big(\mathcal{S}(x, y) \wedge \mathcal{S}(y, x)\big) \vee \big(\forall\, z \in X \;:\; \mathcal{S}(y, z)\big)\Big) \\
\mathrel{=\!\!\mid\!\models}\; & \Big(\big(\mathcal{S}(x, y) \wedge \mathcal{S}(y, x)\big) \Rightarrow \big(\forall\, z \in X \;:\; \mathcal{S}(y, z)\big)\Big).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die folgende umgangssprachlich Formulierung (man beachte den selben Hinweis wie zu Beginn der Lösung von Aufgabe 1.3) : „Es gibt einen Kursteilnehmer derart, daß jeder andere Kursteilnehmer der ihn ansieht und auch von ihm angesehen wird schon alle anderen Kursteilnehmer ansieht.“

Übrigens: Es läßt sich natürlich auch darüber diskutieren, wie man eine reale Situation herstellen kann, in der diese Aussage wahr ist (Zum Beispiel bei einer gerade Anzahl von Teilnehmern, indem sich je zwei direkt ansehen, und die andere nicht im direkten Blickfeld stehen).

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 2.1

a) $\dfrac{64}{24} = \dfrac{8}{3}$,

b) $\dfrac{63a^2b}{14ab^2} = \dfrac{9a}{2b}$, definiert für $a, b \neq 0$,

c) $\dfrac{3(x^2-y^2)}{6y-6x} = \dfrac{3(x-y)(x+y)}{2\cdot 3(y-x)} = -\dfrac{x+y}{2}$,
definiert für $x \neq y$,

d) $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{3a-3b} = \dfrac{(a-b)^2}{3(a-b)} = \dfrac{a-b}{3}$,
definiert für $a \neq b$,

e) $\dfrac{63a^2b^2-9ab}{18ab+27a^2b^2} = \dfrac{9ab(7ab-1)}{9ab(2+3ab)} = \dfrac{7ab-1}{3ab+2}$, definiert für $ab \notin \left\{0, -\frac{2}{3}\right\}$,

f) $\dfrac{1+\frac{1-n}{n(n+3)}}{n+1} = \dfrac{\frac{n^2+3n+(1-n)}{n(n+3)}}{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{n(n+1)(n+3)} = \dfrac{n+1}{n(n+3)}$, definiert für $n \notin \{0, -1, -3\}$,

g) $\dfrac{q^3-1}{q-1} = \dfrac{(q-1)(q^2+q+1)}{q-1} = q^2+q+1$, definiert für $q \neq 1$,

h) $\dfrac{\frac{a}{1-a}+\frac{a+1}{a}}{\frac{a-1}{a}-\frac{a}{a+1}} = \dfrac{\frac{a^2+(1-a^2)}{a(1-a)}}{\frac{a^2-1-a^2}{a(a+1)}} = \dfrac{1}{a(1-a)}\cdot\dfrac{a(a+1)}{-1} = \dfrac{a+1}{a-1}$, definiert für $a \notin \{-1, 0, 1\}$
(beachte, daß dann tatsächlich auch der Nenner im ersten Bruch ungleich 0 ist).

Aufgabe 2.2

a) $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{15} = \dfrac{30+15-10+6-5+2}{30} = \dfrac{38}{30} = \dfrac{19}{15}$,

b) $\dfrac{1+\frac{2}{3}}{2-\frac{4}{5}} = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{6}{5}} = \dfrac{25}{18}$,

c) $\dfrac{10}{7}\cdot\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{28}{3} = \dfrac{10\cdot 9\cdot 28}{2\cdot 3\cdot 7} = 5\cdot 3\cdot 4 = 60$,

d) $\dfrac{x}{-x-2y}+\dfrac{y}{x+2y} = \dfrac{-x}{x+2y}+\dfrac{y}{x+2y} = \dfrac{y-x}{x+2y}$, definiert für $x \neq 2y$

e) $\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{1} = 2$,

f) $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}:\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{a^2+b^2}{(a-b)(a+b)}\cdot\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$, definiert für $|a| \neq |b|$

g) $\dfrac{3a}{6ab}-\dfrac{7b}{3a}+\dfrac{2ab}{4} = \dfrac{3a-14b^2+3a^2b^2}{6ab}$, definiert für $a, b \neq 0$,

h) $\dfrac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{1-x^2} = \dfrac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{x-x^2-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}$,
definiert für $|x| < 1$. Eine mögliche weitere Umformung an dieser Stelle ist
$$\cdots = \frac{-\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}} = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Aufgabe 2.3

Es handelt sich in allen Fällen um auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Ungleichungen, es gilt also $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, und wir nehmen für alle $x \in \mathbb{R}$ gültige äquivalente Umformungen der ursprünglichen Ungleichung vor.

a)
$$\begin{array}{rrcl} & 4x+3 & \leq & 2(x-6) \\ \Leftrightarrow & 4x+3 & \leq & 2x-12 \\ \Leftrightarrow & 2x & \leq & -12-3 \\ \Leftrightarrow & x & \leq & -\frac{15}{2} \end{array}$$

Also ist $\mathbb{L} = \left(-\infty, -\frac{15}{2}\right]$.

b)
$$\begin{array}{rrcl} & \frac{x-1}{2} & \geq & \frac{1-x}{3} \\ \Leftrightarrow & x-1 & \geq & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x \\ \Leftrightarrow & \frac{5}{3}x & \geq & \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow & x & \geq & 1 \end{array}$$

Also ist $\mathbb{L} = [1, \infty)$

c)
$$\begin{array}{rrl} & 4(1-x)+3(x+2) & < 8 \\ \Leftrightarrow & -4x+3x & < 8-4-6 \\ \Leftrightarrow & -x & < -2 \\ \Leftrightarrow & x & > 2 \end{array}$$

Also ist $\mathbb{L} = (2, \infty)$.

d)
$$\begin{array}{rrl} & 3x-1 & \leq 2(x-3)-(2-x) \\ \Leftrightarrow & 3x-2x-x & \leq 1-6-2 \\ \Leftrightarrow & 0 & \leq -7 \end{array}$$

Also ist $\mathbb{L} = \emptyset$.

e)
$$\begin{array}{rrl} & 9x & \geq \frac{3(6x-1)}{2} \\ \Leftrightarrow & 9x-9x & \geq -3/2 \\ \Leftrightarrow & 0 & \geq -3/2 \end{array}$$

Dies ist für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, also ist $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

f)
$$\begin{array}{rrl} & -7x & \geq \frac{3(x-1)}{2} \\ \Leftrightarrow & -14x-3x & \geq -3 \\ \Leftrightarrow & -17x & \geq -3 \\ \Leftrightarrow & x & \leq \frac{3}{17} \end{array}$$

Also ist $\mathbb{L} = \left(-\infty, \frac{3}{17}\right]$.

Aufgabe 2.4

a)
$$\begin{array}{rrl} & 3^{-\frac{1}{2}} & < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow & 1 & < (1/2)^{1/2} \cdot 3^{1/2} \\ \Leftrightarrow & 1 & < (3/2)^{1/2} \end{array}$$

Die Ungleichung ist erfüllt, da $3/2 > 1$ und damit auch $(3/2)^{1/2} > 1$ gilt.

b) Es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
$$\begin{array}{rrl} & (1+a)^2 & \leq 1+2a \\ \Leftrightarrow & 1+2a+a^2 & \leq 1+2a \\ \Leftrightarrow & a^2 & \leq 0, \end{array}$$
und dies ist genau dann erfüllt, wenn $a = 0$.

c) Es sei $a \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:
$$\begin{array}{rrll} & a^2 & > 2, & a \in \mathbb{Z}\ , \\ \Leftrightarrow & |a| & > \sqrt{2} & a \in \mathbb{Z} \end{array}$$

und dies ist wegen $a \in \mathbb{Z}$ genau dann erfüllt, wenn $|a| \geq 2$ ist, also wenn $a \in \mathbb{Z} \backslash -1, 0, 1$ gilt.

d) Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$. Dann gilt:
$$\begin{array}{rrl} & \left(\frac{1+a}{a}\right) & > \left(\frac{a}{a-1}\right) \qquad \text{(Beachte: wegen } a > 1 \text{ sind beide Nenner positiv)} \\ \Leftrightarrow & (1+a)(a-1) & > a^2 \\ \Leftrightarrow & a^2-1 & > a^2 \\ \Leftrightarrow & -1 & > 0, \end{array}$$

was eine falsche Aussage ist. Also ist auch die ursprüngliche Ungleichung falsch, sie wird also für kein $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$ erfüllt.

Aufgabe 2.5

Behauptung. $\forall\, y \in \mathbb{R}\, \exists\, x \in \mathbb{R}_{>0} \,:\, y = x - \frac{1}{x}$.

Beweis. Sei $y \in \mathbb{R}$. Dann ist $\frac{y^2}{4} + 1 > 0$, setze also $x := \frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1}$. Dann gilt

$$x = \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1} + \frac{y}{2} > \sqrt{\frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} = \left|\frac{y}{2}\right| + \frac{y}{2} \geq 0,$$

also ist $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} x^2 - xy - 1 &= \left(\frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1}\right)^2 - \frac{y^2}{2} - y\sqrt{\frac{y^2}{4} + 1} - 1 \\ &= \frac{y^2}{4} + 2 \cdot \frac{y}{2}\sqrt{\frac{y^2}{4} + 1} + \frac{y^2}{4} + 1 - \frac{y^2}{2} - y\sqrt{\frac{y^2}{4} + 1} - 1 = 0, \end{aligned}$$

also ist $x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} = y$. □

Anmerkung: Es wurde ein Beweis in korrekter logischer Struktur vorgestellt – zum Auffinden der Idee, insbesondere, wie man x in Abhängigkeit von y definieren muß, löst man vorab formal die Gleichung $y = x - \frac{1}{x}$ für gegebenes $y \in \mathbb{R}$ nach x auf.

Aufgabe 2.6

Wir werden die zu beweisende Aussage zunächst formalisieren. Definiere

$$U := \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ ist ungerade }\} = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \exists\, k \in \mathbb{N}_0 \,:\, n = 2k + 1\}.$$

Dann ist zu zeigen:

$$\forall\, n \in U \,:\, n^2 \in U.$$

Beweis. Sei $n \in U$. Wähle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2k + 1$. Setze $k' := 2k^2 + 2k$. Dann ist $k' \in \mathbb{N}_0$, und es gilt

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1,$$

also gilt nach Definition auch $n^2 \in U$. □

Aufgabe 2.7

Voraussetzung. Seien A, B Mengen.

Behauptung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) $A \subseteq B$,

(2) $A \cup B = B$,

(3) $A \cap B = A$,

(4) $A \backslash B = \emptyset$.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß gilt (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (4) und (4) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2): Es gelte $A \subseteq B$. Wir zeigen $A \cup B \subseteq B$ und $B \subseteq A \cup B$. Nach Definition ist klar, daß gilt $B \subseteq A \cup B$, es reicht also $A \cup B \subseteq B$ zu zeigen. Sei dazu $x \in A \cup B$.

Fall 1: $x \in A$, wegen $A \subseteq B$ folgt dann auch $x \in B$.

Fall 2: $x \in B$, dann ist nichts mehr zu zeigen.

(2) $\Rightarrow$ (3): Es gelte $A \cup B = B$. Wir zeigen $A \cap B \subseteq A$ und $A \subseteq A \cap B$. Nach Definition ist klar, daß gilt $A \cap B \subseteq A$, es reicht also, $A \subseteq A \cap B$ zu zeigen. Sei dazu $a \in A$. Dann ist insbesondere $a \in A \cup B$, und da nach Voraussetzung gilt $A \cup B = B$, folgt damit auch $a \in B$. Also ist $a \in A \cap B$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Wir zeigen die Kontraposition, also $(A\backslash B \neq \emptyset) \Rightarrow (A \cap B \neq A)$. Gelte also $A\backslash B \neq \emptyset$. Wähle ein $a \in A\backslash B$, dann gilt also $a \in A$ und $a \notin B$. Also ist auch $a \notin A \cap B$, folglich gilt $A \not\subseteq A \cap B$ und somit insbesondere $A \neq A \cap B$.

(4) $\Rightarrow$ (1): Wir zeigen wieder die Kontraposition, also $(A \not\subseteq B) \Rightarrow (A\backslash B \neq \emptyset)$. Gelte also $A \not\subseteq B$. Dann findet man ein $a \in A$ mit $a \notin B$. Folglich ist $a \in A\backslash B$, also $A\backslash B \neq \emptyset$. $\square$

Aufgabe 2.8

Voraussetzung. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ mit $|M| = n + 1$.

Behauptung. Es gibt $a, b \in M$ mit $a \neq b$ und a teilt b.

Beweis. Schreibe $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ mit $a_i \neq a_j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n + 1\}$ mit $i \neq j$. Wir nehmen nun für jede Zahl a_i eine teilweise Primfaktorzerlegung vor, indem wie den Faktor 2 abspalten: Zu jedem $i \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}$ finden wir eine Zahl $k_i \in \mathbb{N}_0$ sowie eine ungerade Zahl $u_i \in \mathbb{N}$ mit $a_i = 2^{k_i} \cdot u_i$.

Es gilt insbesondere $u_i \leq a_i \leq 2n$, also $u_i \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}$. Offenbar enthält $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ genau n verschiedene ungerade Zahlen, also muß es $i, j \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}$ mit $i \neq j$ geben, für die gilt: $u_i = u_j$. Da $a_i \neq a_j$, können wir o.B.d.A. annehmen, daß $k_j > k_i$ ist, also $k := k_j - k_i \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$a_j = 2^{k_j} \cdot u_j = 2^{k+k_i} \cdot u_i = 2^k \cdot (2^{k_i} \cdot u_i) = 2^k a_i.$$

Wegen $k \in \mathbb{N}$ ist 2^k eine ganze Zahl, und per Definition gilt a_i teilt a_j. $\square$

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 3.1

a) $2^{-4} = \frac{1}{16}$, b) $(3^6)^{\frac{1}{12}} = \sqrt{3}$, c) $3^{10} \cdot 3^{-8} = 9$,

d) $2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^2 = 2^{11}4$, e) $(-\frac{1}{3})^3 = -\frac{1}{27}$, f) $(-32)^{\frac{1}{5}} = -2$,

g) $\sqrt[2]{\sqrt{125}} = 5^{\frac{3}{4}}$, h) $\left(\sqrt[3]{a^{\frac{1}{4}}\sqrt{8b}}\right)^4 = 4\sqrt[3]{ab^2}$, i) $\dfrac{\sqrt[3]{x^5y^4}}{\sqrt[4]{16x^2y^{-6}}} = \dfrac{1}{2}\sqrt[6]{x^7y^{17}}$,

j) $\sqrt[8]{a^2b \cdot \sqrt[4]{b^{12}}} = a^{\frac{1}{4}}\, b^{\frac{1}{2}}$, k) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$, l) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$.

Aufgabe 3.2

a) Vor.: $a \neq 0$; $\dfrac{\sqrt[5]{a^3}}{a^2}$ b) Vor.: $a \neq 0$; $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$ c) Vor.: $b > 0$, $c \neq 0$; $\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$

d) $17 + 12\sqrt{2}$ e) $\dfrac{18+5\sqrt{10}}{2}$ f) $2-\sqrt{3}$

g) $5+2\sqrt{6}$ h) $5(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{30})$ i) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

Aufgabe 3.3

Wenden Sie die Definition des Logarithmus an und ermitteln Sie x.

a) $x = 6$ b) $x = 1$ c) $x = 4$ d) $x = -3$

e) $x = -1$ f) $x = -2$ g) $x = -3$ h) $x = 2/3$

i) $x = 3$ j) $x = 3$ k) $x = 2$ l) $x = 1/2$

m) $x = 16$ n) $x = 2$ o) $x = 5$ p) $x = 10$

q) $x = 2$ r) $x = 0$ s) $x = 1/3$ t) $x = 2$

u) $x = 6$ v) $x = 0$ w) $x = 2/3$ x) $x = -1/2$

y) $x = 81$ z) $x = \frac{1}{1000} = 0,001$

Und noch ein paar!

a) $x = 1$ b) $x = 32$ c) $x = \sqrt[3]{e}$ d) $x = 1/25$

Aufgabe 3.4

a) $a > 0, b > 0, c > 0$
$2\ln a + 3\ln b - \ln c$

b) $a > |b|$
$\ln(a+b) + \ln(a-b)$

c) a, b nicht beide 0,
also $(a,b) \neq (0,0)$
Logarithmengesetze nicht anwendbar

d) $a > -b$
$2\ln(a+b)$

e) $a > 0, b > 0$
$2(\ln a + \ln b)$

f) $a > 0, b > 0$
$\ln a + \ln b - \ln(a+b)$

g) $a > |b|$
$\ln(a^2+b^2) - \ln(a+b) - \ln(a-b)$

h) $a > b > 0$
$2(\ln a + \ln b - \ln(a-b))$

i) $a, b > 0$
$-(\frac{1}{2}\ln a + \ln b)$

j) $a, b > 0$
$\frac{5}{4}(3\ln a - \ln b)$

k) $a, b > 0$
$2(\ln b - \ln a)$

l) $a, b, c > 0$
$\ln 8ab^2c^2$

m) $a, b > 0$
$\ln \frac{a^2}{b^4}$

n) $a, b, c > 0$

$\ln \frac{c^2}{b}$

o) $a, b, c, d > 0$

$\ln \frac{\sqrt[3]{a}\, bd}{c^2}$

p) $a + b > 0$

$\ln \sqrt{a^3 + b^3}$

q) $a, b > 0$

$\ln \frac{1}{a^3 \sqrt[3]{b}}$

r) $a > b, ab > 0$. Die zweite Bedingung ist gleichbedeutend mit: $a \neq 0, b \neq 0$, und a, b haben gleiches Vorzeichen

$\ln \left(\frac{a}{a-b}\right)^2$

Anmerkung. In den obigen Lösungen wurden die Gültigkeitsbereiche so gewählt, daß die Umformungen entsprechend stimmen, und alle Ausdrücke Sinn ergeben. Der Einfachheit halber wurde dabei meist $a, b, c, d > 0$ gefordert, so daß die Umformungen entsprechend einfacher wurden. Tatsächlich handelt es sich dabei aber meistens nicht um die *maximal* möglichen Gültigkeitsbereiche: Zum Beispiel in Aufgabe a) könnte man auch nur fordern, daß $a \neq 0$ und $b \cdot c > 0$ ist. In dem Fall ist auch

$$\frac{a^2 b^3}{c} = a^2 b^2 \cdot \frac{b}{c} = |a|^2 |b|^2 \cdot \frac{|b|}{|c|} = \frac{|a|^2 |b|^3}{|c|} > 0,$$

also ist $\ln \frac{a^2 b^3}{c}$ wohldefiniert, und es gilt

$$\ln \frac{a^2 b^3}{c} = \ln \left(\frac{|a|^2 |b|^3}{|c|}\right) = 2 \ln |a| + 3 \ln |b| - \ln |c|.$$

Ähnlich kann man auch in anderen Aufgabenteilen verfahren.

Aufgabe 3.5

Zu zeigen: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a^2 - ab + b^2 \geq 0$, und im Fall $(a, b) \neq (0, 0)$ gilt $a^2 - ab + b^2 > 0$.

Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$a^2 - ab + b^2 = \underbrace{\frac{1}{2}(a-b)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{a^2}{2}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{b^2}{2}}_{\geq 0} \geq 0.$$

Gelte nun zusätzlich $(a, b) \neq (0, 0)$, dann ist $a^2 + b^2 > 0$, also auch $a^2 - ab + b^2 \geq \dfrac{a^2 + b^2}{2} > 0$. □

Alternative Lösung: Folgende Lösung ist da schon etwas umständlicher, aber auch möglich:

Wir verwenden die zwei binomischen Formeln und die Tatsache, daß $(a \pm b)^2 \geq 0$ gilt. Daraus erhalten wir, daß sowohl $a^2 + b^2 \geq 2ab$ $(*)$als auch $a^2 + b^2 \geq -2ab$ $(**)$gilt. Im Falle $ab \geq 0$ verwenden wir $(*)$, andernfalls $(**)$ und erhalten:

$$a^2 + b^2 \geq |2ab| \geq |ab| \geq ab\,.$$

Weitere Überlegungen zeigen:

Sind a, b beide ungleich 0, so gilt $>$ anstelle des zweiten $\geq$. Ist entweder a oder b gleich 0, aber nicht beide, so gilt $>$ anstelle des ersten $\geq$.

Zusammengefaßt gilt also, falls a, b nicht beide Null sind: $a^2 - ab + b^2 > 0$, sonst trivialerweise $a^2 - ab + b^2 = 0$.

Aufgabe 3.6
Sei $\varepsilon \in (0,1)$.

a) Sei $x \in \mathbb{R}$, dann gilt: $|x-1| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x-1 < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

b) Die gesuchte Menge ist in diesem Fall daß Komplement der Menge aller $x \in \mathbb{R}$, welche $|x+3| \le \varepsilon$ erfüllen. Analog zu a) haben gilt $|x+3| \le \varepsilon \Leftrightarrow x \in [-3-\varepsilon, -3+\varepsilon]$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die gesuchte Menge ist also $\mathbb{R} \setminus [-3-\varepsilon, -3+\varepsilon] = (-\infty, -3-\varepsilon) \cup (-3+\varepsilon, \infty)$.

c) Sei $x \in \mathbb{R}$, dann gilt zunächst

$$|x^2-1| \le \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \le x^2 - 1 \le \varepsilon \Leftrightarrow 1-\varepsilon \le x^2 \le 1+\varepsilon \overset{\text{warum?}}{\Leftrightarrow} \sqrt{1-\varepsilon} \le |x| \le \sqrt{1+\varepsilon}.$$

Fall 1: $x \ge 0$: Dann gilt $|x^2-1| \le \varepsilon \Leftrightarrow x \in [\sqrt{1-\varepsilon}, \sqrt{1+\varepsilon}]$

Fall 2: $x < 0$: Dann gilt $|x^2-1| \le \varepsilon \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{1+\varepsilon}, -\sqrt{1-\varepsilon}]$

Also ist die Lösungsmenge $[\sqrt{1-\varepsilon}, \sqrt{1+\varepsilon}] \cup [-\sqrt{1+\varepsilon}, -\sqrt{1-\varepsilon}]$.

d) Wir lösen diese Aufgabe wieder über das Komplement und verfahren analog zu c). Die gesuchte Lösungsmenge ist dann $(-\infty, -\sqrt{2+\varepsilon}] \cup [-\sqrt{2-\varepsilon}, \sqrt{2-\varepsilon}] \cup [\sqrt{2+\varepsilon}, \infty)$

Aufgabe 3.7
Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

a) *Zu zeigen:* Es gilt $|a-b| = |b-a|$.

Setze $x := a-b$, dann ist $b-a = -x$, es ist also zu zeigen, daß gilt $|x| = |-x|$.

Fall 1: $x \ge 0$. Dann ist nach Definition $|x| = x$, und wegen $-x \le 0$ ist $|-x| = -(-x) = x$, also $|x| = x = |-x|$.

Fall 2: $x < 0$. Wende in diesem Fall Fall 1 auf $-x$ anstelle von x an.

b) *Zu zeigen:* Es gilt $\big||a| - |b|\big| \le |a-b|$.

Nach der Dreiecksungleichung (vgl. Vorlesung bzw. Skript) gilt

$$|a| = |(a-b)+b| \le |a-b| + |b| \quad \text{und } |b| = |(b-a)+a| \le |b-a| + |a| = |a-b| + |a|,$$

also $|a| - |b| \le |a-b|$ und $|b| - |a| \le |a-b|$. Wegen $||a|-|b|| \in \{|a|-|b|, |b|-|a|\}$ folgt damit auch $||a|-|b|| \le |a-b|$.

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 4.1

a) (Lösung über Bestimmung der Nullstelle durch Faktorisieren.) Wir lösen zunächst die zugehörige *Gleichung*: Durch „scharfes Hinsehen“ (oder Anwenden einer geeigneten Lösungsmethode wie quadratischer Ergänzung oder pq-Formel) erkennen wir $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, also hat das quadratische Polynom $x^2 - x - 2$ die Nullstellen $-1, 2$.

Da das Vorzeichen des Vorfaktors vom Term x^2 positiv ist, ist die zugehörige Parabel nach oben geöffnet, und es gilt

$$x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1,2), \text{ die gesuchte Lösungsmenge ist also } \mathbb{L} = (-1,2).$$

(Wer mag, kann z.B. bei $x = 0$ überprüfen: $0^2 - 0 - 2 < 0 \ \surd$.)

Diese Lösung bedient sich noch teilweise der Anschauung, eine formal saubere Lösung und zugleich ein formaler Beweis der Aussage, daß die Lösungsmenge der Ungleichung gerade das Intervall $(-1,2)$ ist, wäre zum Beispiel: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 - x - 2 = (x+2)(x-1)$, also

$$\begin{array}{rrcl}
 & x^2 - x - 2 & < & 0 \\
\Leftrightarrow & (x+1)(x-2) & < & 0 \\
\Leftrightarrow & \big[(x > -1) \wedge (x < 2)\big] & \vee & \big[(x < -1) \wedge (x > 2)\big] \\
\overset{(*)}{\Leftrightarrow} & (x > -1) \wedge (x < 2) & \Leftrightarrow & x \in (-1,2),
\end{array}$$

wobei in $(*)$ verwendet wurde, daß die Aussage $(x < -1) \wedge (x > 2)$ immer falsch ist.

b) (Lösung über Bestimmung der Nullstelle durch Quadratisches Ergänzen.) Es gilt

$$x^2 - 7x + 12 = (x - \frac{7}{2})^2 - (\frac{7}{2})^2 + 12 = (x - \frac{7}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

Wir lösen zunächst die zugehörige *Gleichung* $x^2 - 7x + 12 = 0$ (bestimmen also die Nullstellen des Polynoms $x^2 - 7x + 12$):

$$\begin{array}{rrcl}
 & x^2 - 7x + 12 & = & 0 \\
\Leftrightarrow & (x - \frac{7}{2})^2 & = & \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow & x - \frac{7}{2} & = & \pm\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow & x & = & \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow & (x = 4) & \vee & (x = 3)
\end{array}.$$

Die zugehörige Parabel ist nach oben geöffnet, und wir erhalten:

$$\mathbb{L} = (-\infty, 3] \cup [4, \infty) = \mathbb{R} \setminus (3,4).$$

Auch hier geben wir wieder eine Variante für eine formal exakte Lösung ohne Verwendung der Anschauung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt nach der oben durchgeführten quadratischen Ergänzung $x^2 - 7x + 12 = (x - \frac{7}{2})^2 - \frac{1}{4}$, also

$$
\begin{array}{lrcl}
 & x^2-7x+12 & \geq & 0 \\
\Leftrightarrow & (x-\frac{7}{2})^2-\frac{1}{4} & \geq & 0 \\
\Leftrightarrow & (x-\frac{7}{2})^2 & \geq & \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow & \left|x-\frac{7}{2}\right| & \geq & \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow & \left[(x\geq\frac{7}{2})\wedge(x-\frac{7}{2}\geq\frac{1}{2})\right] & \vee & \left[(x\leq\frac{7}{2})\wedge(\frac{7}{2}-x\geq\frac{1}{2})\right] \\
\Leftrightarrow & (x\geq 4)\vee(x\leq 3) & \Leftrightarrow & x\in(-\infty,3]\cup[4,\infty)=\mathbb{R}\setminus(3,4).
\end{array}
$$

Mit den gleichen Methoden kann man analog die übrigen Lösungsmengen bestimmen:

a) (siehe oben)

b) (siehe oben)

c) $(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{3}{2},\infty)$

d) $\mathbb{L}=[-5,1]$

e) $\mathbb{L}=\mathbb{R}$

f) $\mathbb{L}=\{4\}$

g) $\mathbb{L}=\mathbb{R}\setminus\{-7\}$

h) $\mathbb{L}=\emptyset$

i) $\mathbb{L}=\mathbb{R}$

j) $\mathbb{L}=(-3,7)$

Aufgabe 4.2

Für welche $x\in\mathbb{R}$ gilt $x+x^{-1}\geq 10$?

Für $x=0$ ist die Ungleichung nicht definiert und für $x<0$ offensichtlich nicht erfüllt. Sei also $x>0$. Dann gilt:

$$x+\frac{1}{x}\geq 10\Leftrightarrow x^2+1\geq 10x\Leftrightarrow x^2-10x+1\geq 0$$

Dem entspricht eine nach oben geöffnete Parabel. Quadratisches Ergänzen liefert die Nullstellen $5+2\sqrt{6}$ und $5-2\sqrt{6}$. Die Menge der $x\in\mathbb{R}$, für die die Ungleichung erfüllt ist, ist somit gleich $(0,5-2\sqrt{6}]\cup[5+2\sqrt{6},\infty)$.

Aufgabe 4.3

Machen Sie sich klar, wann Ihre Umformungen a priori lediglich eine Implikation, aber keine Äquivalenzumformung sind ($\Rightarrow$). Da Sie bei diesem Typ Aufgabe sowieso eine Probe machen müssen, können Sie auch jede Umformung mit $\Rightarrow$ verbinden (wieso?).

Das Problem, daß i.a. keine Äquivalenzumformung vorliegt, kann zum Beispiel folgendermaßen auftreten: Ist $\sqrt{a}=b$, so folgt $a=b^2$ durch quadrieren, es gilt also $(\sqrt{a}=b)\Rightarrow(a=b^2)$. Ist umgekehrt $a=b^2$ vorgegeben, so folgt hieraus durch Wurzelziehen $\sqrt{a}=\sqrt{b^2}=|b|$, aber i.a. nicht $\sqrt{a}=b$.

An einigen Stellen ist es hingegen doch möglich, die Implikation durch einen Äquivalenzpfeil zu ersetzen, sofern geklärt ist, daß es sich auch tatsächlich um eine Äquivalenzumformung handelt. Wir werden dies an einigen Stellen erläutern.

a) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x}+1=0$

Man sieht entweder sofort, daß diese Gleichung keine Lösung hat (Wurzeln sind nicht-negativ!), oder man formt um:

$$
\begin{array}{lrcl}
\Leftrightarrow & \sqrt{x+6} & = & -(\sqrt{x}+1) \\
\Rightarrow & x+6 & = & x+2\sqrt{x}+1 \\
\Leftrightarrow & 2\sqrt{x} & = & -5 \\
\Rightarrow & x & = & \frac{25}{4}
\end{array}
$$

Probe: $\frac{25}{4}$ ist keine Lösung!

b)

$$
\begin{array}{lrcl}
 & x+\sqrt{x^2-25} & = & 25 \\
\Leftrightarrow & \sqrt{x^2-25} & = & 25-x \\
\Rightarrow & x^2-25 & = & (x-25)^2 \\
 & & \cdots & \\
\Leftrightarrow & x & = & 13
\end{array}
$$

Probe: $x=13$ ist Lösung.

c)
$$\begin{array}{rrcl} & 9\sqrt{5x+2} & = & 25+4\sqrt{5x+2} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{5x+2} & = & 5 \\ \overset{(*)}{\Rightarrow} & 5x+2 & = & 25 \\ \Leftrightarrow & x & = & \frac{23}{5} \end{array}$$

Probe: $x = \frac{23}{5}$ ist Lösung.
An dieser Stelle kann man auch einfacher argumentieren: In $(*)$ gilt auch die Rückrichtung, denn aus $5x+2=25$ folgt insbesondere $5x+2 \geq 0$, und Wurzelziehen ergibt $\sqrt{5x+2} = \sqrt{25} = 5$. Also gilt in $(*)$ sogar $\Leftrightarrow$.

d)
$$\begin{array}{rrcl} & \sqrt{x+2+\sqrt{2x+7}} & = & 4 \\ \Rightarrow & x+2+\sqrt{2x+7} & = & 16 \\ \Rightarrow & 2x+7 & = & (14-x)^2 \\ & & \cdots & \\ \Rightarrow & x^2-30x+189=0 & & \\ \Leftrightarrow & (x-15)^2-15^2+189 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (x-15)^2 & = & 36 \\ \Leftrightarrow & x & = & \pm 6+15 \end{array}$$

Probe: $x_1 = 21$ ist keine Lösung, $x_2 = 9$ ist eine Lösung.

Aufgabe 4.4

a) Die Definitionsmenge dieser Ungleichung ist $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{3\}$. Sei $x \in \mathbb{D}$.

1. Fall: $x-3>0$, bzw. $x>3$. Dann gilt
$$\frac{1}{x-3} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq x-3 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 4.$$
Also ist die erste Teillösung $\mathbb{L}_1 := \mathbb{L} \cap (3,\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x \geq 4\} = [4,+\infty)$.

2. Fall: $x<3$. Dann gilt
$$\frac{1}{x-3} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq x-3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 4.$$
Also ist die zweite Teillösung
$\mathbb{L}_2 := \mathbb{L} \cap (-\infty,3) = \{x \in \mathbb{R} | x < 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x \leq 4\} = (-\infty,3)$.

Insgesamt: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-\infty,3) \cup [4,+\infty)$.

b) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}, \mathbb{L} = (-1,\infty)$

c) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}, \mathbb{L} = (-\infty,-1) \cup (\frac{1}{7},1)$

d) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{1\}, \mathbb{L} = (-\infty,-\frac{3}{8}] \cup (1,\infty)$

Aufgabe 4.5

a) **Lösung I** via Fallunterscheidung: Sei $x \in \mathbb{R}$.

1. Fall: $2x - 3 \geq 0$ bzw. $x \geq \frac{3}{2}$. Dann gilt

$$|2x-3| < x \Leftrightarrow 2x - 3 < x \Leftrightarrow x < 3\,.$$

Wir erhalten die Teillösung $\mathbb{L}_1 = [\frac{3}{2}, \infty) \cap (-\infty, 3) = [\frac{3}{2}, 3)$.

2. Fall: $x < \frac{3}{2}$. Dann gilt

$$|2x-3| < x \Leftrightarrow 3 - 2x < x \Leftrightarrow -3x < -3 \Leftrightarrow x > 1\,.$$

Wir erhalten die Teillösung $\mathbb{L}_2 = [-\infty, \frac{3}{2}) \cap (1, \infty) = (1, \frac{3}{2})$.

Insgesamt ist $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (1, 3)$.

Lösung II via Quadrieren:

Da beide Seiten der Ungleichung stets nicht-negativ sind, gilt:

$$\begin{aligned} |2x-3| < x \quad &\Longleftrightarrow \quad |2x-3|^2 < x^2 \Longleftrightarrow (2x-3)^2 < x^2 \Longleftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 < x^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 < 0 \Longleftrightarrow (x-1)(x-3) < 0 \Longleftrightarrow x \in (1, 3). \end{aligned}$$

b) $\mathbb{L} = (0, 6)$

c) Hinschauen! Der Term im Betrag darf nicht Null sein: $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$

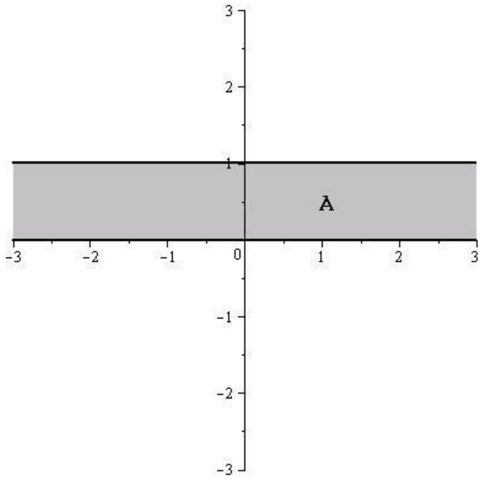
d) $x \leq 1$, aber $x \neq -4$: $\mathbb{L} = (-\infty, 1] \setminus \{-4\}$

e) $\mathbb{L} = (-1, -1/3]$

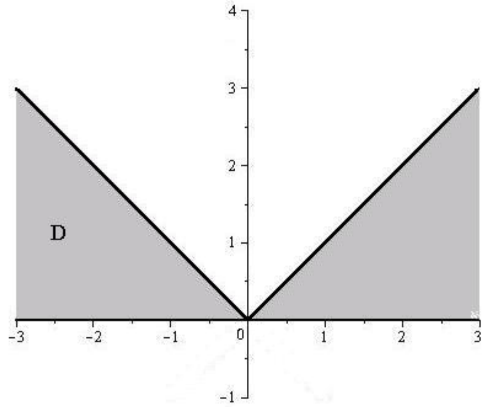
f) $\mathbb{L} = (\frac{3}{2}, \infty)$

Aufgabe 4.6

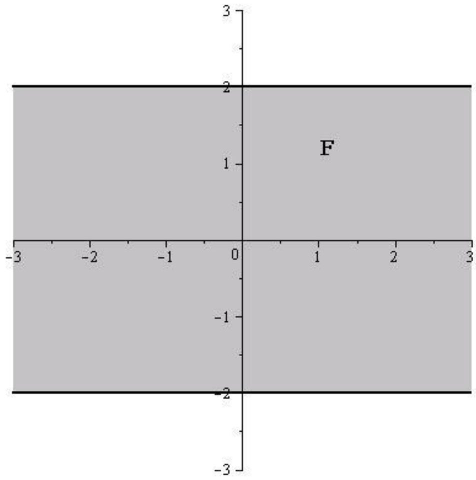
a) $\{(x,y)|\, 0 \leq y \leq 1\}$:



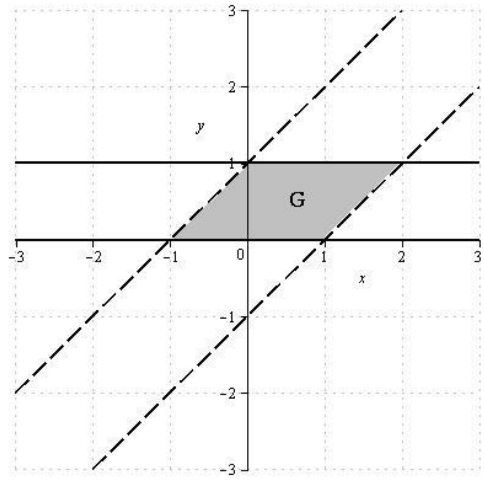
b) $\{(x,y)|\, 0 \leq y \leq |x|\}$:



c) $\{(x,y)|\, y^2 \leq 4\}$:

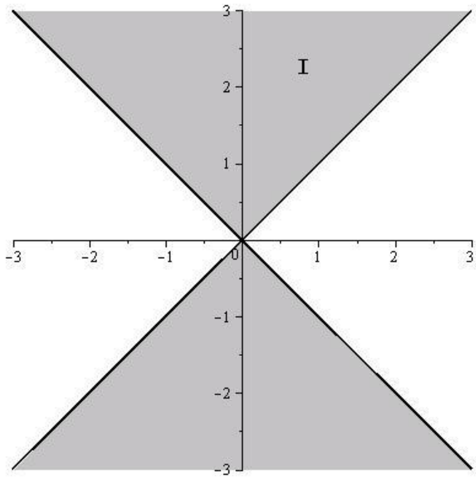


d) $\{(x,y)|\, 0 \leq y \leq 1, |x-y| < 1\}$



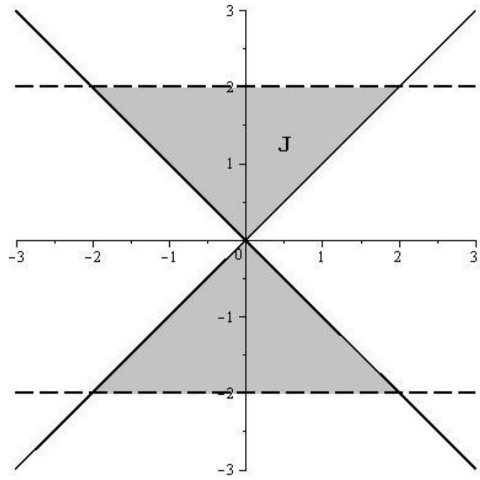
$$\begin{array}{rrcl} & |x-y| & \leq & 1 \\ \Leftrightarrow & -1 \leq x-y & \leq & 1 \\ \Leftrightarrow & (-1 \leq x-y) & \wedge & (x-y \leq 1) \\ \Leftrightarrow & (y \leq x+1) & \wedge & (y \geq x-1) \end{array}$$

e) $\{(x,y)|\, x^2 \leq y^2\}$:



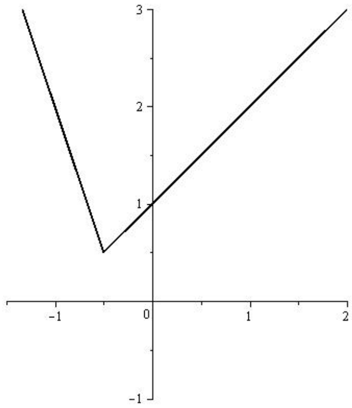
$$\begin{array}{rl} & x^2 \leq y^2 \\ \Leftrightarrow & |x| \leq |y| \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} |x| \leq y, & \text{falls } y \geq 0 \\ |x| \leq -y, & \text{falls } y < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} |x| \leq y, & \text{falls } y \geq 0 \\ -|x| \geq y, & \text{falls } y < 0 \end{cases} \end{array}$$

f) $\{(x,y)|\, x^2 \leq y^2 < 4\}$:

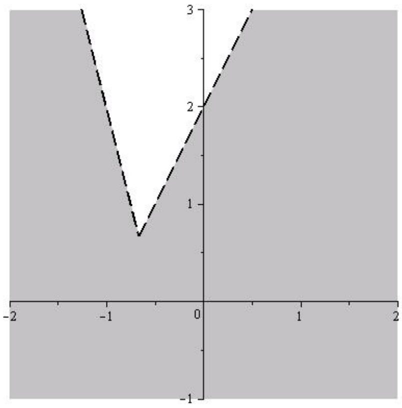


Aufgabe 4.7

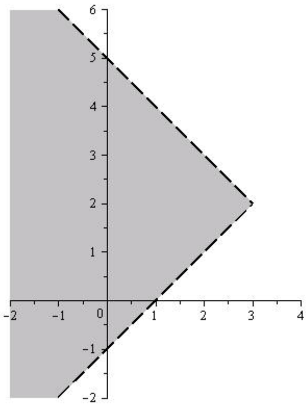
a) $y = \begin{cases} x+1, & \text{falls } x \geq -\frac{1}{2} \\ -3x-1, & \text{falls } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$



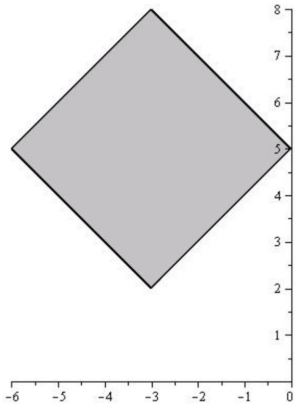
b) $y < \begin{cases} 2x+2, & \text{falls } x \geq -\frac{2}{3} \\ -4x-2, & \text{falls } x < -\frac{2}{3} \end{cases}$



c) $\begin{cases} y < -x+5, & \text{falls } y \geq 2 \\ y > x-1, & \text{falls } y < 2 \end{cases}$



d) $\begin{cases} y \leq -x+5, & \text{falls } -3 \leq x \leq 0 \text{ und } 5 \leq y \leq 8 \\ y \geq x+5, & \text{falls } -3 \leq x \leq 0 \text{ und } 2 \leq y < 5 \\ y \leq x+11, & \text{falls } -6 \leq x < -3 \text{ und } 5 \leq y < 8 \\ y \geq -x-1, & \text{falls } -6 \leq x < -3 \text{ und } 2 \leq y < 5 \end{cases}$



Aufgabenblatt 5

Lösung 5.1

a) Sei $F := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 1\}$. Definiere $D := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$. Dann ist der Graph G_f von f gleich F.

Beweis. Wir zeigen die Mengengleichheit $F = G_f$, indem wir beide Inklusionen beweisen.

„$\subseteq$“: Sei $(x,y) \in F$. Wegen $xy = 1 \neq 0$ ist auch $x \neq 0$, also ist $x \in D$, und es gilt $y = \frac{1}{x} = f(x)$. Also ist $(x,y) \in G_f$.

„$\supseteq$“: Sei $(x,y) \in G_f$. Dann gilt $x \neq 0$ und $y = f(x) = \frac{1}{x}$, also $xy = 1$ und damit auch $(x,y) \in F$ nach Definition von F. ☐

b) Der Einheitskreis $F := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ ist nicht der Graph einer Funktion.

Beweis. Offenbar gilt $(0,1) \in F$ und $(0,-1) \in F$. Angenommen, es gäbe eine reelle Funktion f mit $G_f = F$, dann müßte sowohl $f(0) = 1$ also auch $f(0) = -1$ sein, was im Widerspruch zur Definition einer Funktion steht. ☐

c) Der Nenner eines Bruchs ist nicht eine Funktion des Bruchs, durch

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \frac{p}{q} \mapsto q$$

wird also keine Funktion definiert! Dies liegt daran, daß eine solche Funktion f nicht wohldefiniert wäre, das heißt, der Funktionswert $f(r)$ einer rationalen Zahl wäre nicht unabhängig von der Darstellung von r also Bruch. Es gilt zum Beispiel $r := \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, somit läßt sich r sowohl als Bruch mit Nenner 2 also auch als Bruch mit Nenner 6 darstellen, und daher läßt sich $f(1/2)$ nicht eindeutig definieren.

Lösung 5.2

a) Sei $h : x \mapsto \sqrt{\log x}$. Setze $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log x$ und $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$.

Für alle $x \in D_{\max}(h)$ gilt dann $h(x) = \sqrt{\log x} = (g \circ f)(x)$.

Es gilt $g \circ f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, denn $D_{\max}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R}_{>0} \mid \log x \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} = [1,\infty)$. Also ist $D_{\max}(h) = [1,\infty)$.

b) Sei $h : x \mapsto \frac{7}{x^3-7}$. Setze $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 - 7$ und $g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 7\frac{1}{x}$.

Für alle $x \in D_{\max}(h)$ gilt dann $h(x) = \frac{7}{x^3-7} = (g \circ f)(x)$.

Außerdem ist $g \circ f : \mathbb{R}\backslash\{\sqrt[3]{7}\} \to \mathbb{R}$, da $D_{\max}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 7 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{\sqrt[3]{7}\}$, und damit $D_{\max}(h) = \mathbb{R}\backslash\{\sqrt[3]{7}\}$.

c) Sei $h : x \mapsto \sqrt{5 - \sqrt{x+3}}$.
Setze $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 3,\ \ g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 5 - \sqrt{x}$, und $k : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$.

Für alle $x \in D_{\max}(h)$ gilt dann $h(x) = \sqrt{5 - \sqrt{x+3}} = (k \circ g \circ f)(x)$.

Weiter gilt $D_{\max}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 3 \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} = [-3,\infty)$ und
$D_{\max}(k \circ (g \circ f)) = \{x \in [-3,\infty) \mid 5 - \sqrt{x+3} \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} = [-3,22]$. Somit ist $D_{\max}(h) = [-3,22]$.

d) Sei $h : x \mapsto \log(16 - 2^x)$.
Setze $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2^x,\ \ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 16 - x$ und $k : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log x$.

Für alle $x \in D_{\max}(h)$ gilt dann $h(x) = \log(16 - 2^x) = (k \circ g \circ f)(x)$.

Es ist $D_{\max}(g \circ f) = \mathbb{R}$ und $D_{\max}(k \circ (g \circ f)) = \{x \in \mathbb{R} \mid 16 - 2^x \in \mathbb{R}_{>0}\} = (-\infty,4)$, also ist $D_{\max}(h) = (-\infty,4)$.

Lösung 5.3

Die Funktion f sei jeweils durch eine der folgenden Abbildungsvorschriften $x \mapsto f(x)$ gegeben. Dann bestimmen sich $D_{\max}(f)$ und $B_{\max}(f)$ folgendermaßen:

a) $y = \log x^2$
$D_{\max}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$B_{\max}(f) = (-\infty, \infty)$

b) $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$
$D_{\max}(f) = [-1, 1]$
$B_{\max}(f) = [0, 1]$

c) $x \mapsto \sqrt[3]{x-2}$
$D_{\max}(f) = \mathbb{R}$
$B_{\max}(f) = \mathbb{R}.$

d) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$D_{\max}(f) =$
$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
$B_{\max}(f) = (0, \infty)$

e) $x \mapsto 1 + e^x$
$D_{\max}(f) = \mathbb{R}$
$B_{\max}(f) = (1, \infty)$

f) $x \mapsto \sqrt{1-e^{2x}}$
$D_{\max}(f) = (-\infty, 0]$
$B_{\max}(f) = [0, 1)$

g) $x \mapsto \dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{1-x}}}$
$D_{\max}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$B_{\max}(f) =$
$(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

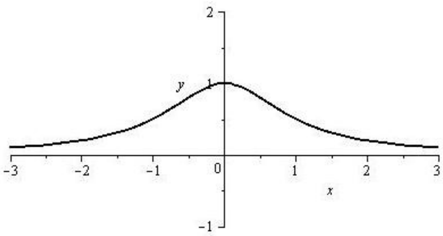
h) $x \mapsto xe^{\sqrt{x}}$
$D_{\max}(f) = [0, \infty)$
$B_{\max}(f) = [0, \infty)$

i) $x \mapsto \dfrac{1}{1-\log x}$
$D_{\max}(f) = (0, \infty) \setminus \{e\}$
$B_{\max}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Lösung 5.4

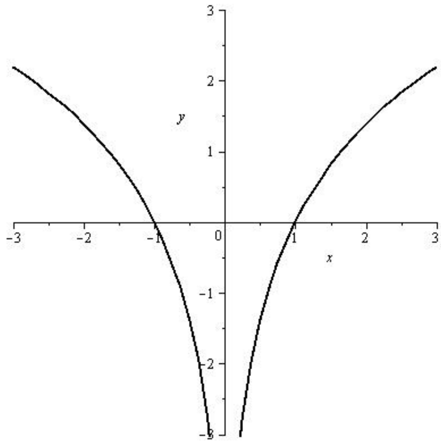
a) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$,

$D_{\max}(f) = \mathbb{R}$; f ist nicht monoton



b) $x \mapsto \ln x^2$,

$D_{\max}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; f ist nicht monoton.



c) $x \mapsto x - 5$,

$D_{\max}(f) = \mathbb{R}$; f ist (streng) monoton wachsend;
Bild klar.

d) $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$,

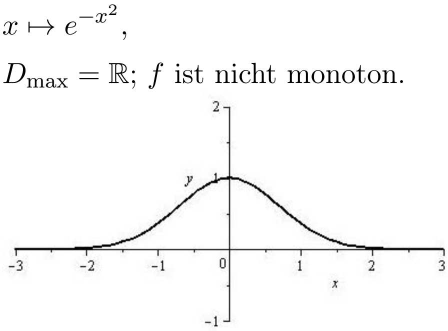
$D_{\max}(f) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$; f ist nicht monoton
Bild: „$y = \frac{1}{x}$ um 1 nach rechts verschoben“.

e) $x \mapsto \ln(x-1)$,

$D_{\max} = (1, \infty)$; f ist (streng) monoton wachsend.
Bild: „durch Verschieben des Graphen von ln“ um 1 nach rechts.

f) $x \mapsto e^{-x^2}$,

$D_{\max} = \mathbb{R}$; f ist nicht monoton.



Aufgabenblatt 6

Lösung 6.1

a) Für $y \in \mathbb{R}$ lösen wir die Gleichung $y = 2 - 3x$ nach x auf und erhalten $x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}y$.

Die Umkehrfunktion

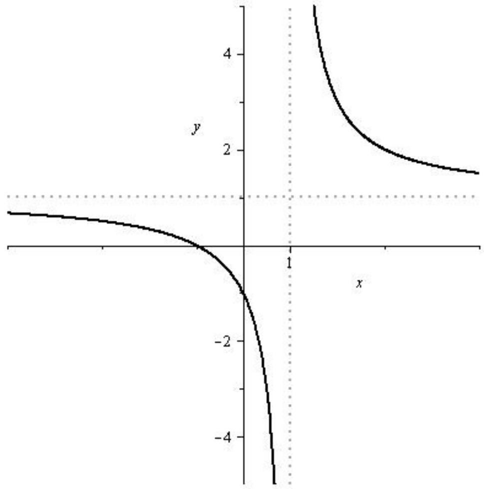
$$f^{-1} : \mathrm{Def}(f^{-1}) = \mathrm{Bild}(f) \to \mathbb{R},$$
$x \mapsto f^{-1}(x)$

erhalten wir durch Vertauschen von x und y in dem obigen Term, also:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

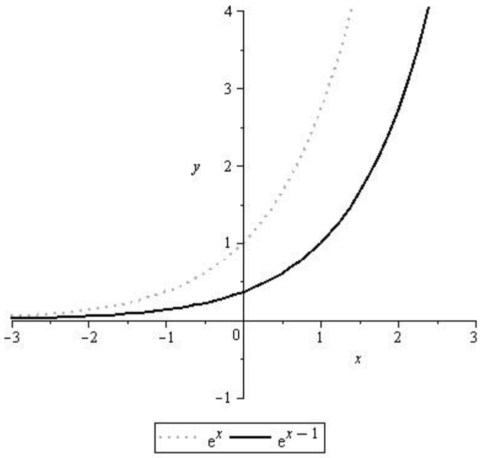
Bild: klar

b) $\mathrm{Def}(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.



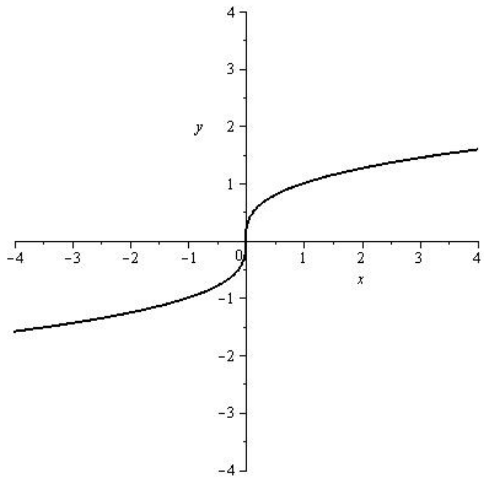
c) Die Funktion ist nicht injektiv: Es ist $1 \neq -1$, aber $f(1) = 0 = f(-1)$.

d) $\mathrm{Def}(f^{-1}) = \mathbb{R}$, und $f^{-1}(x) = e^{x-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$



e) $\mathrm{Def}(f^{-1}) = \mathbb{R}$, und

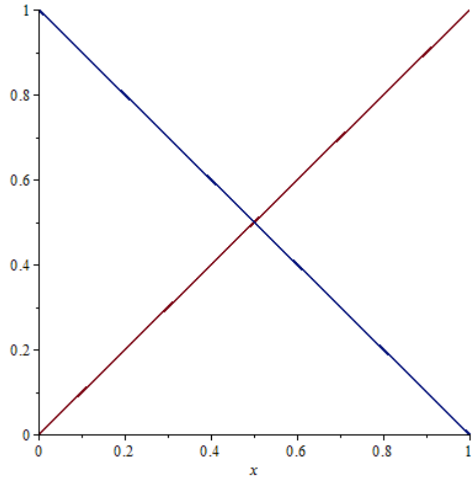
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{falls } x \in [0, \infty) \\ -\sqrt[3]{-x}, & \text{falls } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$



f) Die Funktion ist nicht injektiv: Es ist $1 \neq -1$, aber $f(1) = 12 - e = f(-1)$.

Lösung 6.2

a) Skizze des Graphen von f:



Die blaue (bzw. rote) Linie stellt die Funktionswerte $f(x)$ für rationale (bzw. irrationalen) Zahlen $x \in [0,1]$ dar. Der Graph enthält entlang der blauen (bzw. roten) Linie unendlich viele „Löcher“ ohne Ausdehnung, weshalb sie in der Darstellung nicht sichtbar sind.

b) f ist injektiv und besitzt eine Umkehrfunktion. Wir zeigen dafür zunächst $f(f(x)) = x$ für alle $x \in [0,1]$: Sei dazu $x \in [0,1]$.

Fall 1. $x \notin \mathbb{Q}$. Dann ist $y := f(x) = x \notin \mathbb{Q}$, also auch $f(f(x)) = f(y) = y = x$.

Fall 2. $x \in \mathbb{Q}$. Dann ist auch $y := f(x) = 1 - x \in \mathbb{Q}$, also folgt

$$f(f(x)) = f(y) = 1 - y = 1 - (1 - x) = x.$$

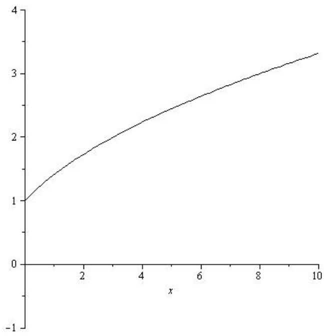
Dies zeigt zum einen, daß f injektiv ist, sind nämlich $x_1, x_2 \in [0,1]$ mit $f(x_1) = f(x_2)$, so folgt

$$x_1 = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = x_2.$$

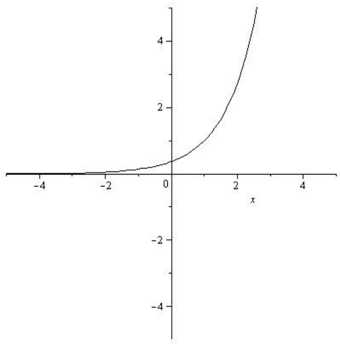
Zum anderen folgt damit auch, daß $f^{-1} = f$ ist.

Lösung 6.3

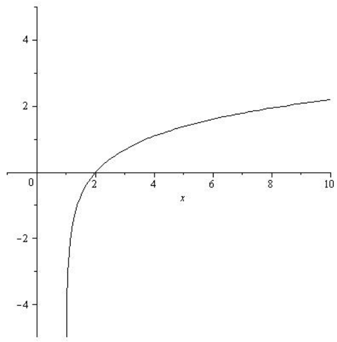
a) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x+1}$



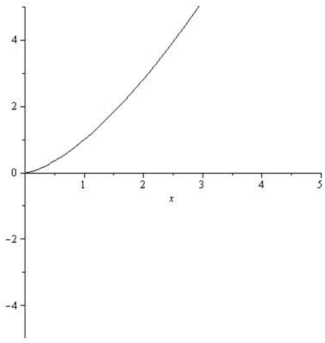
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{x-1}$



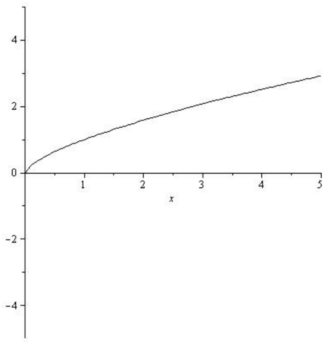
c) $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \log(x-1)$



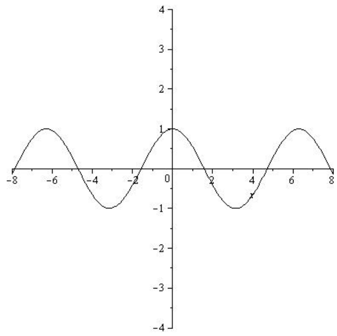
d) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$



e) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$



f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)$



Lösung 6.4

x in $^\circ$	x im Bogenmaß	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
180°	π	0	-1	0
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	-
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
360°	2π	0	1	0

Lösung 6.5

Die Darstellung des Winkels 15° im Bogenmaß ist $x = \pi/12$. In der Vorlesung wurde gezeigt: $\cos(2x) = \cos(\pi/6) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Mit den Additionstheoremen und dem „trigonometrischen Pythagoras“ folgt:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi/6) = \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = (1-\sin^2(x)) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2 x,$$

also $\sin^2(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ und damit

$$\sin(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

da $\sin(x) > 0$ ist. Mit dem „trigonometrischen Pythagoras“ folgt weiter

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4},$$

und damit

$$\cos(x) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

da auch $\cos(x) > 0$ ist. Somit folgt schließlich auch

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}.$$

Alternative Lösung: Es gilt $\frac{1}{12} = \frac{3}{12} - \frac{2}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$, und unter Verwendung der bereits bekannten Werte für Sinus/Cosinus und den Additionstheoremen folgt damit (wobei wir im letzten Schritt denn Nenner rational machen durch Erweitern mit $\sqrt{2}$):

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}),
\end{aligned}$$

sowie analog

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}),
\end{aligned}$$

und damit schließlich auch

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

Man mache sich klar, daß dies trotz anderer Darstellungen dieselben Zahlen sind, die wir oben berechnet haben!

Weitere analoge Lösungswege erhält man z.B über die Zerlegung $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

Lösung 6.6

a) Es sei $x \in [-\pi, \pi]$. Aus den Additionstheoremen folgt (vgl. Vorlesung)

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \left(1 - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\
&= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1,
\end{aligned}$$

und da wegen $\frac{x}{2} \in [-\pi/2, \pi/2]$ gilt $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$, folgt durch Umstellen und Wurzelziehen

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}.$$

b) Es sei $x \in [0, 2\pi]$, dann ist $\frac{x}{2} \in [0, \pi]$, also ist $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$. Aus den Additionstheoremen folgt

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \left(1 - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).
\end{aligned}$$

Umstellen und Wurzelziehen ergibt damit

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}.$$

Lösung 6.7

a) Für diejenigen $x, y \in \mathbb{R}$, für die alle auftretenden Größen definiert sind, folgt aus den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus:

$$\begin{aligned}
\tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)} \\
&= \frac{\sin(x)\cos(y)\,\dfrac{\cos(x)}{\cos(x)} + \cos(x)\,\dfrac{\sin(y)}{\cos(y)}\cdot\cos(y)}{\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)} \\
&= \frac{\tan(x)\,(\cos(y)\cos(x)) + \tan(y)\,(\cos(x)\cos(y))}{\cos(x)\cos(y)\left(1-\dfrac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}\right)} = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\cdot\tan(y)}.
\end{aligned}$$

b) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos(x) \neq 0$, dann folgt mit dem „trigonometrischen Pythagoras“:

$$1+\tan^2(x) = 1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Lösung 6.8

Aufgabe: Leiten Sie Additionstheoreme für $\sin(3x)$, $\cos(3x)$ und $\tan(3x)$ her.

Wir verwenden dafür die bereits bekannten Additionstheoreme.

1. Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sin(3x) &= \sin(x+2x) = \sin(x)\cos(2x)+\cos(x)\sin(2x) \\
&= \sin(x)\big(\cos^2(x)-\sin^2(x)\big)+\cos(x)\big(2\sin(x)\cos(x)\big) \\
&= 3\sin(x)\cos^2(x)-\sin^3(x) = 3\sin(x)\big(1-\sin^2(x)\big)-\sin^3(x) = 3\sin(x)-4\sin^3(x).
\end{aligned}$$

2. Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(x+2x) = \cos(x)\cos(2x)-\sin(x)\sin(2x) \\
&= \cos(x)\big(\cos^2(x)-\sin^2(x)\big)-\sin(x)\,\big(2\sin(x)\cos(x)\big) = \cos^3(x)-3\sin^2(x)\cos(x) \\
&= \cos^3(x)-3\big(1-\cos^2(x)\big)\cos(x) = 4\cos^3(x)-3\cos(x).
\end{aligned}$$

3. Zur Herleitung des Additionstheorems für $\tan(3x)$ definieren wir $t := \tan(x)$, und wir nehmen an, daß $x \in \mathbb{R}$ so gewählt ist, daß alle auftretenden Terme definiert sind. Mit dem bereits bekannten Additionstheorem für den Tangesn folgt:

$$\begin{aligned}
\tan(3x) &= \tan(x+2x) = \frac{t+\tan(2x)}{1-t\cdot\tan(2x)} = \frac{t+\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)}{1-t\cdot\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)} = \frac{\frac{(t-t^3)+2t}{1-t^2}}{\frac{(1-t^2)-2t^2}{1-t^2}} \\
&= \frac{3\tan(x)-\tan^3(x)}{1-3\tan^3(x)}.
\end{aligned}$$

Aufgabenblatt 7

Lösung 7.1
Es gilt:

a) $(1+i)^2 = 2i$,

b) $\dfrac{1}{2-i} = \dfrac{2}{5}i\dfrac{1}{5}i$,

c) $\dfrac{1-2i}{1+3i} = \dfrac{(1-2i)(1-3i)}{10} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i =$,

d) $(5-i)(6-i) + \dfrac{5-i}{6-i} = \cdots = \dfrac{1104}{37} - \dfrac{408}{37}i$,

e) $(1-i)^{16} = (-2i)^8 = 256$,

f) $\left(\dfrac{2+i}{3-2i}\right)^2 = \dfrac{3+4i}{5-12i} = -\dfrac{33}{169} + \dfrac{56}{169}i$.

Lösung 7.2
Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Setze $a := \operatorname{Re}(z), b := \operatorname{Im}(z), c := \operatorname{Re}(w), d := \operatorname{Im}(d)$, so daß $z = a + ib$ und $w = c + id$ ist. Dann gilt:

a) $\overline{z+w} = \overline{(a+c)+i(b+d)} = a + c - i(b+d) = (a-ib) + (c-id) = \overline{z} + \overline{w}$.

b)
$$\begin{aligned} \overline{z \cdot w} &= \overline{(ac-bd)+i(ad+bc)} = (ac-bd) - i(ad+bc) = (ac-(-b)(-d)) + i(a(-d)+(-b)c) \\ &= (a-ib)(c-id) = \overline{z} \cdot \overline{w}. \end{aligned}$$

c) $|\overline{z}| = |a - ib| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |a+ib| = |z|$.

d)
$$\begin{aligned} |z \cdot w|^2 &= |(ac-bd)+i(ad+bc)|^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 \\ &= (ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2 \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = |z|^2 \cdot |w|^2. \end{aligned}$$

Lösung 7.3
Es seien $z, w \in \mathbb{C}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 + |z-w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) + (z-w)(\overline{z}-\overline{w}) \\ &= \big(|z|^2 + w\overline{z} + z\overline{w} + |w|^2\big) + \big(|z|^2 - w\overline{z} - z\overline{w} + |w|^2\big) = 2\big(|z|^2 + |w|^2\big). \end{aligned}$$

Lösung 7.4
(Hier nur Umformungen der angegeben Mengen und Beschreibung - Skizzen sollte man selbst anfertigen.)

a) Setze $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 < \operatorname{Re}(iz) \le 3\}$. Allgemein gilt $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, also gilt

$$z \in M_1 \iff -3 \le \operatorname{Im}(z) < -1.$$

b) Setze $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z+1+i| = |z-3-3i|\}$.

Anschaulich: Dann ist M_2 die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die vom Punkt $z_0 = -(1+i)$ denselben Abstand haben wie vom Punkt $z_1 = 3(1+i)$. Damit ist M_2 die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke von z_0 mit z_1, also die Gerade $G = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(z) = 2\}$.

Beweisskizze: Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$\begin{aligned} z \in M_2 &\iff |(a+ib) + (1+i)|^2 = |a + ib - 3 - 3i|^2 \\ &\iff |(a+1) + i(b+1)|^2 = |(a-3) + i(b-3)|^2 \\ &\iff (a^2 + 2a + 1) + (b^2 + 2b + 1) = (a^2 - 6a + 9) + (b^2 - 6b + 9) \\ &\iff 8a + 8b = 16 \iff a + b = 2 \iff z \in G. \end{aligned}$$

(**Anmerkung**: Allgemein kann man ähnlich zeigen, daß $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| = |z - z_1|\}$ gleich der Geraden $p + i\mathbb{R}v$ ist mit $p := \frac{z_0+z_1}{2}$ und $v := \frac{z_0-z_1}{2}$.)

c) Setze $M_3 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re}(z^2) \leq 1\}$. Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$, also gilt $z \in M_3 \iff x^2 - y^2 \leq 1$.

d) Setze $M_4 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |2z + 4i - 6| \leq 8\}$. Dann gilt $z \in M_4 \iff |z - (3 - 2i)| \leq 4$, also ist M_4 eine Kreisscheibe um den Mittelpunkt $3 - 2i$ mit Radius 4.

Lösung 7.5

a) Sei $z \in \mathbb{C}$, dann ergibt Quadratisches Ergänzen $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, also gilt

$$z^2 + z + 1 = 0 \iff \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} = \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Somit ist die gesuchte Lösungsmenge

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, z^2 + z + 1 = 0\} = \left\{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

b) Wir stellen zunächst fest, daß die gegebene Gleichung äquivalent ist zur Gleichung

$$z^2 - 2z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Sei $z \in \mathbb{C}$, dann ergibt Quadratisches Ergänzen $z^2 - 2z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = (z-1)^2 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, also gilt

$$z^2 - 2z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \iff (z-1)^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wir müssen daher eine komplexe Wurzel aus der Zahl $D := \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ziehen. Dazu verwenden wir die Formel aus der Vorlesung: Es ist $|D| = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, also wird eine Wurzel gegeben durch

$$w := \frac{D+1}{|D+1|} = \frac{\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}}} = \frac{\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

(Eine alternative Möglichkeit wäre gewesen: Man erkennt, daß $D = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)$ ist, also ist eine Wurzel gegeben durch $\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)$, und Einsetzen der entsprechenden Werte führt auf dasselbe w.) Somit ist die gesuchte Lösungsmenge

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, 2z^2 - 4z + 1 = i\sqrt{3}\} = \left\{\frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right\}.$$

c) Zum Lösen der Gleichung $z^3 + 3z^2 + 5z + 3 = 0$ „raten“ wir zunächst die spezielle Lösung $z = -1$ und führen eine Polynomdivision durch. Diese führt auf $z^3 + 3z^2 + 5z + 3 = (z+1)(z^2 + 2z + 3)$. Es bleiben also die Nullstellen des Polynoms $z^2 + 2z + 3$ zu berechnen. Quadratische Ergänzung liefert $z^2 + 2z + 3 = (z+1)^2 + 2$, die gesuchten Nullstellen ergeben sich also zu $-1 + i\sqrt{2}$ und $-1 - i\sqrt{2}$, und die gesamte Lösungsmenge lautet

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, z^3 + 3z^2 + 5z + 3 = 0\} = \{-1, -1 + i\sqrt{2}, -1 - i\sqrt{2}\}.$$

d) Zum Lösen der Gleichung $z^3 - 6iz^2 - 11z + 6i = 0$ „raten“ wir zunächst die spezielle Lösung $z = i$ und führen eine Polynomdivision durch. Diese führt auf $z^3 - 6iz^2 - 11z + 6i = (z-i)(z^2 - 5iz - 6)$. Es bleiben also die Nullstellen des Polynoms $z^2 - 5iz - 6$ zu berechnen. Quadratische Ergänzung liefert $z^2 - 5iz - 6 = \left(z - \frac{5}{2}i\right)^2 + \frac{25}{4} - 6 = \left(z - \frac{5}{2}i\right)^2 + \frac{1}{4}$, die gesuchten Nullstellen ergeben sich also zu $\frac{5}{2}i + \frac{i}{2} = 3i$ und $\frac{5}{2}i - \frac{i}{2} = 2i$, und die gesamte Lösungsmenge lautet

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, z^3 - 6iz^2 - 11z + 6i = 0\} = \{i, 2i, 3i\}.$$

Lösung 7.6

Aufgabe: Bestimmen Sie eine komplexe Zahl $w \in \mathbb{C}$ so, daß die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto w \cdot z$ in der Gaußschen Zahlenebene die Drehung um 30° gegen den Uhrzeigersinn beschreibt.

Der Winkel 30° ist im Bogenmaß gegeben durch $\frac{\pi}{6}$, daher leistet $w := \cos(\pi/6)+\sin(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ gemäß Vorlesung das Gewünschte.

Lösung 7.7

Aufgabe: Bestimmen Sie die komplexen dritten Einheitswurzeln, also diejenigen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 = 1$, und geben Sie jeweils Real- und Imaginärteil an.

Eine Einheitswurzel ist (immer) die Zahl 1, und Polynomdivision ergibt $z^3-1 = (z-1)(z^2+z+1)$. Nach Aufgabe 7.5 a) sind daher die verbleibenden beiden dritten Einheitswurzeln gerade $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Alternativ hätte man mit den Ausführungen aus der Vorlesung, Abschnitt 8.4, sowie unter Verwendung der bekannten Werte von Cosinus und Sinus, auch direkt die drei dritten Einheitswurzeln angeben können als

$$z_k := \cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2,$$

also $z_0 = 1, z_1 = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi 3) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $z_2 = \cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi 3) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aufgabenblatt 8

Lösung 8.1

Voraussetzung: Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Behauptung: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) $x \neq 0$, und es gibt *kein* $t \in \mathbb{R}$ mit $y = t \cdot x$,

(b) $y \neq 0$, und es gibt *kein* $s \in \mathbb{R}$ mit $x = s \cdot y$,

(c) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt: Ist $\lambda x + \mu y = 0$, so folgt $\lambda = \mu = 0$.

Beweis. Wir zeigen jeweils die Kontrapositionen.

„(a)⇒ (b)“ Wir zeigen „¬(b)⇒ ¬ (a)“. Es gelte also

$$(y = 0) \vee \exists\, s \in \mathbb{R} \,:\, x = sy.$$

Zu zeigen ist: $(x = 0) \vee \exists\, t \in \mathbb{R} \,:\, y = tx$. Wir zeigen die äquivalente Implikation

$$x \neq 0 \Rightarrow \exists\, t \in \mathbb{R} \,:\, y = tx.$$

Es gelte also $x \neq 0$.

Fall 1: $y = 0$. In diesem Fall setze $t := 0$, dann folgt $y = 0 = 0 \cdot x$.

Fall 2: Es gibt ein $s \in \mathbb{R}$ mit $x = sy$. Wegen $x \neq 0$ folgt auch $s \neq 0$, denn sonst wäre $x = 0 \cdot y = 0$. In diesem Fall setze $t := 1/s$, dann folgt $y = t \cdot x$.

„(b)⇒ (c)“ Wir zeigen „¬(c)⇒ ¬ (b)“. Es gebe also $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda x + \mu y = 0$, also $\lambda x = -\mu y$, und $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Zu zeigen ist: $(y = 0) \vee \exists\, s \in \mathbb{R} \,:\, x = sy$. Wir zeigen die äquivalente Implikation

$$y \neq 0 \Rightarrow \exists\, s \in \mathbb{R} \,:\, x = sy.$$

Es gelte also $y \neq 0$.

Fall 1: $\lambda \neq 0$. In diesem Fall setze $s := -\frac{\mu}{\lambda}$, dann folgt $x = s \cdot y$.

Fall 2: $\mu \neq 0$. Dann ist $\lambda x = \mu y \neq 0$, also ist insbesondere auch in diesem Fall $\lambda \neq 0$, und mit $s := -\frac{\mu}{\lambda}$ folgt wieder $x = s \cdot y$.

„(c)⇒ (a)“ Wir zeigen „¬(a)⇒ ¬ (c)“. Es gelte also $(x = 0) \vee \exists\, t \in \mathbb{R} \,:\, y = tx$.

Zu zeigen ist: Es gibt $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda x + \mu y = 0$ und $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Fall 1: $x = 0$. In diesem Fall setze $\lambda := 1$ und $\mu := 0$, dann ist $(\lambda, \mu) = (1, 0) \neq (0, 0)$, und es gilt

$$\lambda x + \mu y = 1 \cdot 0 + 0 \cdot y = 0.$$

Fall 2: Es gibt ein $t \in \mathbb{R}$ mit $y = tx$. In diesem Fall setze $\lambda := t$ und $\mu := -1$, dann ist $(\lambda, \mu) = (t, -1) \neq (0, 0)$, und es gilt

$$\lambda x + \mu y = tx - y = 0.$$

□

Geometrisch bedeuten die Bedingungen, daß x und y weder in die selbe noch die direkt entgegengesetzte Richtung zeigen, das heißt, x, y sind *linear unabhängig*.

Lösung 8.2

(1) **Aufgabe**: Finden Sie zu den folgenden in Parameter-Darstellung gegebenen Geraden jeweils eine lineare Gleichung, deren Lösungsmenge gleich der Geraden ist.

a) $G_1 := (6,2) + \mathbb{R}(3,2)$, b) $G_2 := (1,2) + \mathbb{R}(1,-3)$.

Zu a) Ein Vektor $x = (x_1, x_2)$ liegt genau dann in G_1, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $x_1 = 6 + 3\lambda$ und $x_2 = 2 + 2\lambda$, und in diesem Fall folgt $2x_1 - 3x_2 = 6$. Ähnlich wie in der Vorlesung kann man nun auch umgekehrt zeigen, daß jede Lösung der Gleichung $2x_1 - 3x_2 = 6$ auch in G_1 liegt.

Zu b) Eine mögliche Gleichung ist in diesem Fall $3x_1 + x_2 = 5$.

(2) Aufgabe: Geben Sie zu den folgenden linearen Gleichungen die Lösungsmenge als Gerade in Parameter-Darstellung an.

a) $x_1 - 4x_2 = 9$, b) $3x_1 + x_2 = -1$.

Hier muß man einfach nur jeweils 2 Punkte ausrechnen, die die Gleichung erfüllen, und bildet die zugehörige Gerade. Mögliche Lösungen sind:

a) $G_3 = (1,-2) + \mathbb{R}(4,1)$, b) $G_4 = (0,-1) + \mathbb{R}(1,-3)$.

Lösung 8.3

Aufgabe: Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme, und skizzieren Sie jeweils die Lösungsmenge in der Ebene.

a) $\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & = & -19 \end{array}$, b) $\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 6x_2 & = & 18 \\ -5x_1 & + & 10x_2 & = & -30 \end{array}$,

c) $\begin{array}{rcrcr} -2x_1 & + & 6x_2 & = & -6 \\ 7x_1 & - & 21x_2 & = & 20 \end{array}$, d) $\begin{array}{rcrcr} -3x_1 & + & x_2 & = & -2 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & 1. \end{array}$.

Lösungsmengen:

a) $\mathbb{L}_1 = \{(-2,3)\}$,

b) $\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 2x_2 = 6\} = (2,2) + \mathbb{R}(2,1)$,

c) $\mathbb{L}_3 = \emptyset$,

d) $\mathbb{L}_4 = \{(1,1)\}$.

Lösung 8.4

a) Aufgabe: Finden Sie für die Ebene $E_1 := \{(x_1, x_2, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -6\}$ eine Parameter-Darstellung, also $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ mit $E_1 = u + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w$.

Hier berechnet man einfach wieder drei Punkte in E_1, etwa indem man jeweils zwei Variablen 0 setzt, und bildet die zugehörige Ebene. Mögliche Lösung:

$$E_1 = (0,3,0) + \mathbb{R}(0,3,6) + \mathbb{R}(2,3,0)$$

b) Aufgabe: Finden Sie eine lineare Gleichung, deren Lösungsmenge die folgende Ebene ist:

$$E_2 := (1,-1,1) + \mathbb{R}(-1,0,1) + \mathbb{R}(2,1,2).$$

Diese Aufgabe ginge man systematisch am einfachsten an, indem man den Orthogonalraum zu $\mathbb{R}(-1,0,1) + \mathbb{R}(2,1,2)$ bestimmt, etwa mit dem Kreuzprodukt, und für den so erhalten Vektor a und $b := a \cdot (1,-1,1)$ leistet dann die Gleichung $a \cdot x = b$ das Gewünschte. Man kann hier aber auch „ad hoc“ versuchen, die gegebenen Gleichungen für die Komponenten von $x \in E_2$ so linear zu kombinieren, daß die auftretenden Variablen eliminiert werden. Eine mögliche Lösung hier ist

$$x_1 - 4x_2 + x_3 = 6.$$

Lösung 8.5

Aufgabe: Berechnen Sie den Schnitt der Ebenen $E_1 := \{(x_1, x_2, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - 3x_3 = 6\}$ und $E_2 := \{(x_1, x_2, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 3\}$, und stellen Sie diesen ggf. in Parameter-Gestalt dar.

Der Schnitt $E_1 \cap E_2$ ist die Lösungsmenge des linearen GLS

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array},$$

welche sich darstellen läßt als $(2,1,0) + \mathbb{R}(1,0,1)$.

Lösung 8.6
Aufgabe: Berechnen Sie den Schnitt der Geraden $G := (2,1,2) + \mathbb{R}(-2,1,-1)$ mit der Ebene E, die durch die drei Punkte $(1,1,1), (2,2,3)$ und $(3,2,0)$ verläuft.

Hier stellen wir zunächst die Ebene E in Parameter-Gestalt dar als

$$E = (1,1,1) + \mathbb{R}(1,1,2) + \mathbb{R}(2,1,-1).$$

Zur Ermittlung des Schnittpunktes suchen wir nach $\lambda, t, s \in \mathbb{R}$ so, daß gilt

$$(2,1,2) + \lambda(-2,1,-1) = (1,1,1) + t(1,1,2) + t(2,1,-1),$$

also

$$\lambda(2,-1,2) + t(1,1,2) + t(2,1,-1) = (1,0,1).$$

Da zugehörige lineare GLS hat die eindeutige Lösung $\lambda = t = \frac{1}{3}, s = 0$. Setzt man dies in die Geraden- oder Ebenengleichuung ein, erhält man den Schnittpunkt $(\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3})$.

Lösung 8.7
Aufgabe: Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & -6x_2 & + & 3x_3 & = & -33 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 10x_3 & = & -47 \\ -2x_1 & + & 11x_2 & + & 16x_3 & = & 3 \end{array}$$

Dieses lineare GLS besitzt die eindeutige Lösung $(2,5,-3)$.

Lösung 8.8
Es gilt der *verallgemeinerten Satz von Pythagoras*:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \;:\; \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle.$$

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 &\overset{\text{Def.}}{=} \langle x-y, x-y\rangle \overset{(S1)}{=} \langle x, x-y\rangle - \langle y, x-y\rangle \overset{(S1)}{=} \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\overset{\text{Def., (S2)}}{=} \|x^2\| - \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle. \end{aligned}$$

□

Anschauung im Fall $n = 2$: Wir betrachten den Spezialfall, daß x, y senkrecht zueinander stehen. Dann gilt $\langle x, y\rangle = 0$, und $0, x, y$ stellen die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks dar, und die Gleichung $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ist der bekannte Satz von Pythagoras für dieses Dreieck.

Aufgabenblatt 9

Lösung 9.1

Voraussetzung: Es seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ mathematische Aussagen.

Behauptung: Es gilt: $\big[(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})\big] \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$.

Beweis. Es gelte $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$.

Zu zeigen: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$.

Es gelte also $\mathcal{A}$. Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, also folgt, daß auch $\mathcal{B}$ gilt. Nach Voraussetzung gilt außerdem $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$, also folgt auch $\mathcal{C}$, und damit ist die Behauptung bewiesen. □

Lösung 9.2

(a) *Voraussetzung:* Es seien $A, B, M \subseteq \mathbb{N}$ Mengen. Es gelte $A, B \neq \emptyset$, und: $\forall a \in A \, \forall b \in B \, \exists x \in M : \; x = a + b$.

Behauptung: $\exists x \in M : \; x > 1$.

Beweis. Da nach Voraussetzung gilt $A, B \neq \emptyset$, finden wir ein $a \in A$ und ein $b \in B$. Nach Voraussetzung finden wir ein $x \in M$ mit $x = a + b$. Es folgt:

$$x = a + b \geq 1 + 1 = 2 > 1, \quad \text{also } \; x > 1.$$

□

(b) *Voraussetzung:* Es seien $A, B, M \subseteq \mathbb{N}$ Mengen. Es gelte: $\exists a \in A \, \forall b \in B : \; b > 2a + 1$.

Behauptung: $\forall x \in B : \; x \geq 4$.

Beweis. Nach Voraussetzung finden wir ein $a \in A$ mit der Eigenschaft

$$\forall b \in B : \; b > 2a + 1. \tag{3}$$

Sei $b \in B$. Wegen (3) gilt dann

$$b > 2a + 1 \geq 2 + 1 = 3, \quad \text{also } \; b \geq 3 + 1 = 4.$$

□

Lösung 9.3

Definition 1. Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt *dummbrumm*, falls ein $m \in \mathbb{N}$ existiert so, daß $\dfrac{x-3}{4} = m$. Die Zahl x heißt *brummdumm*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x = 2n - 5$.

Definition 2. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *schnickschnack*, falls $f(x)$ dummbrumm ist für alle $x \in \mathbb{R}$, die brummdumm sind. Die Funktion heißt *schnackschnick*, falls $f(x)$ brummdumm ist für alle $x \in \mathbb{R}$, die dummbrumm sind.

Definition 3. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ heißt *pingpong*, wenn für jede Funktion f, die schnackschnick ist, auch $T(f)$ schnackschnick ist. Die Funktion T heißt *pongping*, falls das Bild von schnickschnack Funktionen schnickschnack ist.

Behauptung:

a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: Wenn x dummbrumm ist, dann ist x auch brummdumm.

b) Ist $x \in \mathbb{R}$ brummdumm, so ist im allgemeinen x nicht dummbrumm.

c) Für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt: Wenn f schnickschnack ist, so ist f auch schnackschnick.

d) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 5$ ist schnackschnick, aber nicht schnickschnack, also gilt im allgemeinen nicht die Umkehrung der Implikation in Teil c).

e) Die Funktion $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}, f \mapsto 2f + 1$ ist pongping, aber nicht pingpong.

f) Die Hintereinanderausführung von zwei pingpong Funktionen ist wieder pingpong.

Beweis. Wir stellen vorab fest: Nach Definition ist ein $x \in \mathbb{R}$ genau dann dummbrumm, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{x-3}{4} = m$, was gleichbedeutend damit ist, daß es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $x = 4m+3$.

a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gelte: x ist dummbrumm, dann finden wir ein $m \in \mathbb{N}$ mit $x = 4m + 3$. Setze $n := 2m + 4$, dann ist $n \in \mathbb{N}$, und es gilt

$$x = 4m + 3 = 4m + 8 - 5 = 2(2m + 4) - 5 = 2n - 5,$$

also ist x nach Definition auch brummdumm.

b) Definiere $x := -3$, dann ist $x = 2 \cdot 1 - 5$, also ist x brummdumm. Wir beweisen nun durch Widerspruch, daß x nicht dummbrumm ist. Dazu nehmen wir an, x sei dummbrumm, dann finden wir ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m = \frac{x-3}{4}$, und es folgt $m = \frac{-3-3}{4} = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$, was einen Widerspruch ergibt.

c) Es sei $f \in \mathcal{F}$. Es gelte: f ist schnickschnack. Zu zeigen ist, daß f schnackschnick ist, daß also gilt:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, x \text{ dummbrumm } \Rightarrow f(x) \text{ brummdumm.}$$

Sei also $x \in \mathbb{R}$ dummbrumm. Nach Teil a) ist x dann auch brummdumm, und da f nach Voraussetzung schnickschnack ist, ist $f(x)$ dummbrumm. Wiederum mit Teil a) folgt damit schließlich, daß $f(x)$ auch brummdumm ist.

d) Definiere die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 5$. Wir zeigen:

(i) g ist schnackschnick,

(ii) g ist nicht schnickschnack.

Zu (i): Zu zeigen ist:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, x \text{ dummbrumm } \Rightarrow g(x) \text{ brummdumm.}$$

Sei also $x \in \mathbb{R}$ dummbrumm, dann finden wir ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{x-3}{4} = m$, und es folgt $x = 3+4m$, also $g(x) = 2 \cdot (3+4m) + 5 = 11 + 8m = 16 + 8m - 5 = 2(4m+8) - 5$, also ist $g(x)$ brummdumm.

Zu (ii): Zu zeigen ist: Es gibt ein $x \in \mathbb{R}$, das brummdumm ist so, daß $g(x)$ nicht dummbrumm ist. Setze dazu $x := -3$, dann wurde im Beweis von b) bereits gezeigt, daß x brummdumm ist. Wir beweisen nun durch Widerspruch, daß $g(x) = 2 \cdot (-3) + 5 = -1$ nicht dummbrumm ist: Dazu nehmen wir an, -1 sei dummbrumm, dann finden wir ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m = \frac{-1-3}{4} = -1$, was einen Widerspruch ergibt.

e) Definiere die Funktion $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}, f \mapsto 2f + 1$.

Wir zeigen zuerst, daß T nicht pingpong ist. Dafür ist zu zeigen, daß es ein $f \in \mathcal{F}$ gibt, das schnackschnick ist, für das aber $T(f)$ nicht schnackschnick ist. Definiere dazu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x - 10$.

(i) f ist schnackschnick: Sei $x \in \mathbb{R}$ dummbrumm, dann finden wir ein $m \in \mathbb{N}$ mit $x = 4m + 3$. Es folgt $f(x) = 4m - 7$. Setze $n := 2m - 1$, dann gilt $n \in \mathbb{N}$, und es gilt $f(x) = 4m - 7 = 2(2m - 1) - 5 = 2n - 5$, also ist $f(x)$ brummdumm.

(ii) $h := T(f) = 2f + 1$ ist nicht schnackschnick: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt zunächst $h(x) = 2f(x) + 1 = 2(x - 10) + 1 = 2x - 19$. Um zu beweisen, daß h nicht schnackschnick ist, müssen wir zeigen, daß es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, das dummbrumm ist, für das $h(x)$ aber nicht brummdumm ist. Setze $x := 7 = 4 \cdot 1 + 3$, dann ist x nach Definition dummmbrumm. Es bleibt zu zeigen, daß $y := h(x) = 2x - 19 = -5$ nicht brummdumm ist. Dies beweisen wir wieder durch Widerspruch, wir nehmen also an $y = -5$ sei dummbrumm, dann finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $-5 = y = 2n - 5$, also ist $n = 0$, was einen Widerspruch ergibt.

Als nächstes zeigen wir, daß T pongping ist, dafür ist zu zeigen:

$$\forall f \in \mathcal{F} \,:\, f \text{ schnickschnack } \Rightarrow T(f) \text{ schnickschnack.}$$

Es sei also $f \in \mathcal{F}$ schnickschnack. Dann ist zu zeigen, daß auch $T(f) = 2f + 1$ schnickschnack ist. Sei dafür $x \in \mathbb{R}$ brummdumm. Da f schnickschnack ist, ist dann $z := f(x)$ dummbrumm, wir finden also ein $m \in \mathbb{N}$ mit $z = 4m + 3$. Zu zeigen ist nun, daß $2f(x) + 1 = 2z + 1$ ebenfalls dummbrumm ist. Es gilt $2z + 1 = 8m + 7 = 4(2m + 1) + 3$. Mit $m' := 2m + 1 \in \mathbb{N}$ folgt also $2z + 1 = 2m' + 3$, und damit ist gezeigt, daß $2z + 1$ dummbrumm ist.

f) Es seien $T, S : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ pingpong Funktionen. Zu zeigen ist, daß auch $S \circ T$ wieder pingpong ist, zu zeigen ist also:

$$\forall f \in \mathcal{F} \,:\, f \text{ schnackschnick } \Rightarrow (S \circ T)(f) \text{ schnackschnick.}$$

Sei also $f \in \mathcal{F}$ schnackschnick. Da T pingpong ist, ist dann auch $T(f)$ schnackschnick, und da S ebenfalls pingpong ist, ist auch $(S \circ T)(f) = S(T(f))$ schnackschnick, was zu zeigen war. $\square$

Lösung 9.4

Voraussetzung: Es seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion, sowie $A, B \subseteq X$ und $C, D \subseteq Y$.

Behauptung:

a) Es gilt im allgemeinen nicht $f(A \backslash B) = f(A) \backslash f(B)$.
b) Es gilt $f^{-1}(C \backslash D) = f^{-1}(C) \backslash f^{-1}(D)$.
c) Es gilt $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
d) Es gilt im allgemeinen nicht $A = f^{-1}(f(A))$.

Beweis. a) Wir bringen ein explizites Gegenbeispiel: Definiere $g : \{0, 1\} \to \{0\}, x \mapsto 0$ sowie $A' := \{0, 1\}$ und $B' := \{0\}$, dann gilt

$$g(A' \backslash B') = g(\{1\}) = \{0\} \neq \emptyset = \{0\} \backslash \{0\} = g(\{0, 1\}) \backslash g(\{0\}) = g(A') \backslash g(B').$$

b) Es sei $x \in X$, dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \backslash D) \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x) \in C \backslash D \Longleftrightarrow \big(f(x) \in C \wedge f(x) \notin D\big) \\ &\Longleftrightarrow \quad \big(x \in f^{-1}(C) \wedge x \notin f^{-1}(D)\big) \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \backslash f^{-1}(D). \end{aligned}$$

c) Es sei $x \in X$, dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \cup D) \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x) \in C \cup D \Longleftrightarrow \big(f(x) \in C \vee f(x) \in D\big) \\ &\Longleftrightarrow \quad \big(x \in f^{-1}(C) \vee x \in f^{-1}(D)\big) \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D). \end{aligned}$$

d) Wir bringen ein explizites Gegenbeispiel: Definiere wie in Teil a) die Funktion $g : \{0, 1\} \to \{0\}, x \mapsto 0$ sowie $A' := \{0\}$, dann gilt

$$g^{-1}(g(A)) = g^{-1}(\{0\}) = \{0, 1\} \neq \{0\} = A.$$

$\square$

Lösung 9.5

Voraussetzung: Es seien X, Y, Z nicht-leere Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen.

Behauptung: Es gilt:

a) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ f injektiv,

b) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ g surjektiv.

c) Die Implikationen „$g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ g injektiv“ und „$g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ f surjektiv“ gelten im allgemeinen nicht.

Beweis. a) Die Funktion $h := g \circ f$ sei injektiv. Zu zeigen ist, daß f injektiv ist, also nach Definition:

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \; : \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Seien also $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann folgt

$$h(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = h(x_2),$$

und da h injektiv ist, folgt $x_1 = x_2$.

b) Die Funktion $h := g \circ f$ sei surjektiv. Zu zeigen ist, daß g surjektiv ist, also nach Definition:

$$\forall\, z \in Z\, \exists y \in Y \; : \; z = g(y).$$

Sei also $z \in Z$. Da h surjektiv ist, findet man ein $x \in X$ mit $z = h(x)$. Setze $y := f(x) \in Y$, dann folgt

$$g(y) = g(f(x)) = h(x) = z.$$

c) Wir bringen ein explizites Gegenbeispiel, das beide Fälle abdeckt: Definiere $X := Z := \{0\}$ und $Y := \{0, 1\}$ sowie die Funktionen $f : X \to Y, x \mapsto 0$ und $g : Y \to Z, x \mapsto 0$. Dann ist $g \circ f : \{0\} \to \{0\}, x \mapsto 0$ injektiv und surjektiv, aber g ist nicht injektiv, da $g(0) = 0 = g(1)$, und f ist nicht surjektiv, da $1 \notin f(X)$. $\square$