Vorbe rechne rungen Funktionen

Schulmathematik: (1) \( y = x^2 \quad (x \in \mathbb{R}) \)

"Rechen vor schri ft": (2) \( g(x) = \frac{1}{x} \quad \mathbb{D} g = \mathbb{R} \setminus \{0\} \)

Physisch - Fragen: z.B. Weg \( s \) nach Zeit \( t \) mit

Ge schwin dig kei t \( v \) : \( s = v \cdot t \)

"funktio nale zu sammen häng

Zwi schen physikalischen größen": (3) \( s = s(t) = v \cdot t \)

Gemeinsame Phänomen: Zuordnung

(1) \( f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \)

(2) \( g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x} \)

(3) \( s : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto v \cdot t \)

\( \tilde{f} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \)

Dann gilt \( f \neq \tilde{f} \), denn \( \text{Def}(\tilde{f}) \neq \text{Def}(f) \)

[ hingegen \( f(x) \neq \tilde{f}(x) \) ließe \( x^2 \neq x^2 \) ?]

Beispiele für Bildmengen:

(1) Bild \( (f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} : y = x^2 \} \)

= \( [0, +\infty) \) \( \Rightarrow \) \( y \geq 0 \)

(2) Bild \( (g) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : y = \frac{1}{x} \} \)

\( = \mathbb{R} \setminus \{0\} \) \( \Rightarrow \) \( x = \frac{1}{y}, \ y \neq 0 \)
(3) \( v \geq 0 \) für \( v \) vorgeben.

\[ \text{Bild (c)} = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \exists t \in [0, \infty] : y = t \cdot v \right\} \]

\[ = \begin{cases} \{0\} & \text{falls } v = 0 \\ [0, \infty] & \text{falls } v > 0 \end{cases} \]

Allgemein: Zuordnung muss keine rechte Vorschrift sein, sondern irgendeine (aber wohl definierte) Zuordnung.

Beispiele

a) \( X := Y := \) Menge aller Menschen

\[ M : X \rightarrow Y, \ x \mapsto (\text{biolog.}) \text{ Mutter von } x \]

\[ M(x) = \text{Mutter von } x \]

b) \( X := \) Menge aller Böcke in meinem Regal

\( Y := \) Menge aller Buchstaben

\[ B : X \rightarrow Y, \ x \mapsto \text{1. Buchstabe auf 1. Seite} \]

c) \( X := \{1, 2, 3, 4, 5\}, \ Y := \{a, 0, c\} \)

\[ f : X \rightarrow Y, \ x \mapsto \begin{cases} a & \text{falls } x \in \{1, 2, 4, 5\} \\ c & \text{falls } x = 3 \end{cases} \]

\[ f(1) = a, \ f(2) = a, \ f(3) = c, \ f(4) = a \]

\[ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2 \]

\[ \text{Def}(f) = \mathbb{R} \]

\[ \text{Bild}(f) = [0, \infty] \]
\[ g(f) := \begin{cases} (x, x^2) & | x \in \mathbb{R} \leq \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ f(x) \end{cases} \]

Nochmal zu Bsp. c):
\[ f = \begin{pmatrix} 1, a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4, a \end{pmatrix} \]

Visualisierung mit Phildiagrammen:

Beispiele: Behörde
\[ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 4 - x^2 \]
\[ g : \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x} \]

1) \( f \circ g : I \) als Bildung von Schrift:
\[ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 4 - (\sqrt{x})^2 = 4 - x \]
für \( x \in \text{Def}(f \circ g) \);

I. Definitionsbereich

\[
\text{Def}(f \circ g) = \left\{ x \in \text{Def}(g) \mid g(x) \in \text{Def}(f) \right\} = \left\{ x \in [0, \infty) \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R} \right\} = [0, \infty)
\]

\( f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 4 - x^2 \)
\( g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x} \)

2) \( g \circ f \):

\[
(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4 - x^2) = \sqrt{4 - x^2}
\]

für \( x \in \text{Def}(g \circ f) \);

\[
\text{Def}(g \circ f) = \left\{ x \in \text{Def}(f) \mid f(x) \in \text{Def}(g) \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 4 - x^2 \in [0, \infty) \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 4 - x^2 \geq 0 \right\} = [-2, 2]
\]

\[\text{Bsp. e 1.} \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (\text{1. reelle Zahlen außer } 0)
\]

\( f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (\text{1. reelle Zahlen außer } 0)
\)

\( f \) ist nur definiert für \( x \geq 0 \)
\[ \frac{1}{y} = \text{ für } y \neq 0 \]

Also: \( x \geq 0 \) sein und \( \sqrt{x} \neq 0 \), also insgesamt: \( x > 0 \)

\[ D_{\text{max}}(f) = \mathbb{R}, +\infty \] .

2. \( x \mapsto \log(\log(x)) \) (Erinnere an: \( \log = \ln = \log_e \))

- \( \log(x) \) ist nun definiert für \( x > 0 \).
- Also: \( x > 0 \) sein und \( \log(x) > 0 \)

Für welche \( x > 0 \) gilt \( y = \log(x) > 0 \) ?

\[ y = \log(x) \iff e^y = x \]

\[ x = e^y \implies \begin{cases} y > 0 \implies y > 0 \\ y < 0 \implies y > 0 \end{cases} \]

Also: \( \log(x) > 0 \iff x > 1 \).

\[ D_{\text{max}}(f) = \mathbb{R}, +\infty \] .

---

Pause bis M: 4 5 Uhr

Beispiel 6.15: \( f(x) = \log(-x^2 + x + 2) \)

Bestimmte maximalen Definitionsbereich und maximales Bild (d.h. Bild der Funktion \( f: D_{\text{max}}(f) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \) )
\[ D_{\text{max}}: -x^2 + x + 2 > 0 \iff x^2 - x - 2 < 0 \]
\[ \iff (x + 1)(x - 2) < 0 \]
\[ \iff -1 < x < 2 \]
\[ \iff x \in \mathbb{J}_{-1, 2} \]

\[ D_{\text{max}}(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid -x^2 + x + 2 > 0 \} = \mathbb{J}_{-1, 2} \]

\[ B_{\text{max}}(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{J}_{-1, 2}: y = \log(-x^2 + x + 2)^4 \}
\]

**Brauchen Scheitelpunkt der Parabel, dazu QE:**

\[ -x^2 + x + 2 = - \left( x^2 - x - 2 \right) = \]

\[ \text{QE} = - \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} - 2 \right] = \]

\[ = - \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} \right] = - \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{9}{4} \]

\[ B_{\text{max}}(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{J}_{-1, 2}: y = \log(-x^2 + x + 2)^4 \in \mathbb{J}_{0, \frac{9}{4}} \}
\]

\[ = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists z \in \mathbb{J}_{0, \frac{9}{4}}: y = \log(z)^4 \}
\]

\[ = \mathbb{J}_{-\infty, \log(\frac{9}{4})} \]

Mehr Bsp.e im Skript.
Beispiele zu Monotonie

1) \( f: \mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{R}_1, x \mapsto x^2 \) ist streng monoton wachsend.

Beweis: Zu zeigen:

\[ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_1 : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \]

Es seien \( x_1, x_2 \in \mathbb{R}_1 \).

Es gelte: \( x_1 < x_2 \).

Zweckmäßigerweise gilt:

\[ f(x_1) < f(x_2), \text{ also } x_1^2 < x_2^2 \]

Da beide Faktoren positiv sind.

\( f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0 \)

\( > 0 \), da \( x_2 > x_1 \geq 0 \)

\( x_1 < x_2 \) rech.

Vor. (†)

2) \( g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \) ist weder monoton wachsend noch monoton fallend.

Was heißt: "\( g \) ist nicht monoton wachsend" ?

\[ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2) \]

also: \( \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \land g(x_1) > g(x_2) \)
Wäre wegen einer \( \triangle \) Existenzansage;

and:

if explicit \( \text{gegenbeispiel}^1 \)

Setze \( x_1 := -1 \), \( x_2 := 0 \), dann gilt

\[ x_1 < x_2 \quad \text{also} \quad g(x_1) = (-1)^2 = 1 > 0 = g(x_2), \]

\[ \text{also} \quad g(x_1) > g(x_2). \]

\[ \left( \text{Teilweise beendet} \right) \]

\[ g \text{ ist auf } \mathbb{R} \text{ nicht monoton fallend: } \]

(explicit \( \text{gegenbeispiel} \): \( x_1 := 0 \), \( x_2 := 1 \), dann gilt \( x_1 < x_2 \)), also

\[ f(x_1) = 0^2 = 0 < 1 = 1^2 = f(x_2), \]

\[ \text{also} \quad f(x_1) < f(x_2). \]

\[ \left( \text{ganzes beendet} \right) \]

\[ \text{andere Notationen: } \square \square \text{ (q.e.d.)} \]

3) \( \sqrt{x} : [0, +\infty] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x} \)

ist stetig monoton wachsend, also:

\[ \forall x_1, x_2 \in [0, +\infty] : x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}. \]

I. \( \text{Beweis} \): Seien \( x_1, x_2 \in [0, +\infty] \) mit \( x_1 < x_2 \).

\[ \left[ 2.2 : \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \right] \]

so gilt:

\[ \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) \cdot (\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} > 0, \]

(\( \text{Erweitern} \))

\( \text{also} \quad \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} > 0. \)
\[ \begin{align*}
\text{also } \sqrt{x^2} & < \sqrt{x^2}.
\end{align*} \]

**II. Beweis:** Aus (1) wissen wir:

\[ \forall x, y \in [0, +\infty]: x < y \Rightarrow x^2 < y^2 \]

und:

\[ \forall x, y \in [0, +\infty]: x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2 \]

*Kontrapositiv*: \[ x^2 > y^2 \Rightarrow x > y \]

\[ \begin{align*}
\forall x, y \in [0, +\infty]: y^2 > x^2 & \Rightarrow y > x \\
\text{also und zusammen:} & \\
\forall x, y \in [0, +\infty]: x < y & \Rightarrow x^2 < y^2. \\
\end{align*} \]

\[ \begin{align*}
\forall a, b \in [0, +\infty]: \sqrt{a} & < \sqrt{b} \Rightarrow a < b. \\
\text{Wegen } \leq \text{ gilt insbesondere: } \forall \text{ ist streng monotone Abbildung.} \\
\end{align*} \]

---

*Prüfen, ob $f$ gerade / ungerade: $f(-x) = ...$*

**Bsp. 1:** \[ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2 + 4. \]

\[ f(-x) = (-x)^2 + 4 = x^2 + 4 = f(x) \]

$\Rightarrow$ $f$ ist gerade.

**Bsp. 2:** \[ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto x^3 + 2x. \]
3) \( f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2 + x \)

\[
 f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x
\]

\( f \) ist weder gerade noch \( \text{i.e.} \quad x^2 + x \quad \neq \quad x^2 - x \) ungerade; \( \exp\text{pliziel es } \text{Gegens}\text{eispiel:} \)

\( x^* = 2 \), dann ist \( f(x^*) = 6 \)

\( \text{und} \quad f(-x) = 4 - 2 = 2 \neq \frac{1}{2} 6 = f(x) \)

\( \frac{7}{-6} = -f(x) \)