CAU Kiel
Mathematisches Seminar/PerLe
Dr. Alexander Ullmann, Dr. Patryk Brzezinski

Vorkurs Mathematik: Arbeitsblatt 1

Es bezeichne $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge der *natürlichen* und $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge der *ganzen Zahlen*.

Aufgabe 1.1

Finden Sie Beispiele für die Verknüpfung von Aussagen, indem Sie die Aussage $\mathcal{A}$:=„Heute ist Montag.“ mit Aussagen aus der folgenden Liste mithilfe von Junktoren ($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$) so verknüpfen, daß Sie mindestens vier weitere wahre Aussagen erhalten:

$\mathcal{B}$:=„Heute ist Dienstag.“

$\mathcal{C}$:=„Heute ist kein Montag.“

$\mathcal{D}$:=„Gestern war kein Montag.“

$\mathcal{E}$:=„Gestern war Sonntag.“

$\mathcal{F}$:=„Heute ist Werktag.“

$\mathcal{G}$:=„Gestern war Wochenende.

Beispiel: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{F}$.

Können Sie aus den Aussagen $\mathcal{B} - \mathcal{G}$ durch Verknüpfung weitere wahre Aussagen erzeugen?

Aufgabe 1.2

Der Barbier von Sevilla

In Sevilla hat jeder Mann zwei Möglichkeiten, morgens rasiert zu werden: Entweder er rasiert sich selbst, oder er sucht den Barbier von Sevilla auf. Von diesem sagt man, er sei derjenige Mann in Sevilla, der genau diejenigen Männer rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

Frage: Rasiert der Barbier von Sevilla sich selbst, oder nicht?

Aufgabe 1.3

a) Schreiben Sie die folgende Mengen in der beschreibenden Darstellung:

$$A := \{\text{ Nord, West, Süd, Ost }\},$$
$$B := \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39\}.$$

b) Schreiben Sie die folgenden Mengen in der aufzählenden Darstellung:

$$C := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists\, k \in \mathbb{Z} :\ n = k^2 \text{ und } -7 \leq k \leq 7\},$$
$$D := \{q \mid \exists\, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} :\ q = \tfrac{1}{3k} \text{ und } \tfrac{2}{k} \in \mathbb{Z}\}.$$

Aufgabe 1.4

a) Notieren Sie die Menge aller Quadrate in den natürlichen Zahlen in beschreibender Darstellung.

b) Notieren Sie die Menge aller natürlichen Zahlen, die sich als Summe von höchstens drei Quadraten schreiben lassen in beschreibender Darstellung.

Ist es möglich, eine der Mengen aus a) oder b) auch in aufzählender Darstellung zu notieren?

Aufgabe 1.5
Seien X, Y Mengen und $\mathcal{F}$ eine Eigenschaft auf $X \times Y$, welche für $(x, y) \in X \times Y$ eine Aussage $\mathcal{F}(x, y)$ definiert (vgl. den entsprechenden Abschnitt der Vorlesung).

a) Formulieren Sie die folgenden Aussagen in Worten:

$$\begin{aligned}
&\exists x \in X : (\forall y \in Y : \mathcal{F}(x, y)),\\
&\exists x \in X : (\exists y \in Y : \mathcal{F}(x, y)),\\
&\forall x \in X : (\exists y \in Y : \mathcal{F}(x, y)),\\
&\forall x \in X : (\forall y \in Y : \mathcal{F}(x, y).)
\end{aligned}$$

b) Sei nun X die Menge der Teilnehmer des Vorkurses und Y die Menge der Aufgaben und $\mathcal{F}(x, y)$ die Aussage: „Der Teilnehmer x hat die Aufgabe y eigenständig gelöst.“

Formulieren Sie damit die Aussagen aus a).

Aufgabe 1.6
Betrachten Sie die Aussagen

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0,\\
&\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y = 0.
\end{aligned}$$

Was bedeuten sie und welche dieser Aussagen ist wahr? Wie lauten die Negierungen?

Aufgabe 1.7
Es sei X eine Menge und $\mathcal{E}(\cdot), \mathcal{F}(\cdot)$ Eigenschaften auf X, welche für alle $x \in X$ Aussagen $\mathcal{E}(x), \mathcal{F}(x)$ definieren. Formulieren Sie mithilfe von Quantoren die Aussage „Jedes $x \in X$ erfüllt entweder $\mathcal{E}(x)$ oder $\mathcal{F}(x)$“, und bilden Sie auch die Negierung dieser Aussage.

Aufgabe 1.8
Formalisieren und verneinen Sie die folgende Aussagen. Geben Sie ferner eine umgangssprachliche Formulierung der Verneinung an.

a) „Wenn es regnet, werde ich naß, sofern ich draußen stehe, keinen Regenschirm dabei habe oder ich mich nirgendwo unterstellen kann.“

b) „Jeder Kursteilnehmer sieht einen anderen Kursteilnehmer, der ihn ansieht, aber nicht alle anderen.“