

Vorkurs Mathematik: Arbeitsblatt 3

Aufgabe 3.1

Berechnen bzw. vereinfachen Sie:

a) 2^{-4} ,	b) $(3^6)^{\frac{1}{12}}$,	c) $3^{10} \cdot 3^{-8}$,	d) $2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^2$,
e) $(-\frac{1}{3})^3$,	f) $(-32)^{\frac{1}{5}}$,	g) $\sqrt[2]{\sqrt{125}}$,	h) $\left(\sqrt[3]{a^{\frac{1}{4}} \sqrt{8b}}\right)^4$,
i) $\frac{\sqrt[3]{x^5 y^4}}{\sqrt[4]{16x^2 y^{-6}}}$,	j) $\sqrt[8]{a^2 b \cdot \sqrt[4]{b^{12}}}$,	k) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$,	l) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

Aufgabe 3.2

Machen Sie die Nenner der folgenden Brüche rational. Geben Sie Bedingungen an die Parameter an, damit die Ausdrücke definiert sind.

a) $\frac{1}{\sqrt[5]{a^7}}$, $a \neq 0$,	b) $\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$	c) $\frac{ab}{c\sqrt{b}}$,
d) $\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$,	e) $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$,	f) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$,
g) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$,	h) $\frac{60}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}$,	i) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$.

Aufgabe 3.3

Wenden Sie die Definition des Logarithmus an und ermitteln Sie x .

a) $2^x = 64$	b) $64^x = 64$,	c) $3^x = 81$,	d) $2^x = \frac{1}{8}$,
e) $3^x = \frac{1}{3}$,	f) $10^x = 0,01$,	g) $5^x = 0,008$,	h) $8^x = 4$,
i) $\log_x 9 = 2$,	j) $\log_x 243 = 5$,	k) $\log_x 1024 = 10$,	l) $\log_x \frac{1}{16} = 4$,
m) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$,	n) $\log_x \frac{1}{32} = -5$,	o) $\log_x \frac{1}{5} = -1$,	p) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$,
q) $\log_7 49 = x$,	r) $\log_5 1 = x$,	s) $\log_7 \sqrt[6]{49} = x$,	t) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = x$,
u) $\log_{10} 10^6 = x$,	v) $\log_{10} 1 = x$,	w) $\log_{10} \sqrt[3]{100} = x$,	x) $\log_{10} \sqrt{\frac{1}{10}} = x$,
y) $\log_3 x = 4$,		z) $\log_{10} x = -3$.	

Und noch ein paar!

a) $\log_{10} x = 0$,	b) $\log_{\frac{1}{2}} x = -5$,	c) $\log_e x = \frac{1}{3}$,	d) $\log_5 x = -2$.
------------------------	----------------------------------	-------------------------------	----------------------

Aufgabe 3.4

Wenden Sie die Potenz- und Logarithmengesetze an um die folgenden Terme umzuformen, und legen Sie jeweils den Gültigkeitsbereich von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ fest.

a) $\ln \frac{a^2 b^3}{c}$,	b) $\ln(a^2 - b^2)$,	c) $\ln(a^2 + b^2)$,
d) $\ln(a + b)^2$,	e) $\ln(a^2 b^2)$,	f) $\ln \frac{ab}{a+b}$,
g) $\ln \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$,	h) $\ln \frac{a^2 b^2}{(a-b)^2}$,	i) $\ln \frac{a^2 \sqrt{b}}{\sqrt{a^5 b^3}}$.

j) $\ln \left(\frac{a^3}{b} \right)^{\frac{5}{4}},$

k) $\ln \frac{b}{a} - \ln \frac{a}{b},$

l) $\ln 2a + 2 \ln b + 2 \ln 2c,$

m) $2 \ln a - 4 \ln b,$

n) $\frac{1}{2} \ln a + 2 \ln c - \frac{1}{3}(\ln b^3 + \ln a^{\frac{3}{2}}),$

o) $\frac{1}{3}(\ln a + 3 \ln b) - \frac{1}{2}(4 \ln c - 2 \ln d),$

p) $\frac{1}{2} \ln(a^2 - ab + b^2) + \frac{1}{2} \ln(a + b),$

q) $-3 \ln a - \frac{1}{3} \ln b,$

r) $\ln \frac{a}{b} + \ln(ab) - 2 \ln(a - b).$

Aufgabe 3.5

(Vergleiche **Aufgabe 3.4 p)**) Zeigen Sie, daß für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$a^2 - ab + b^2 \geq 0$$

gilt, mit $>$, falls a und b nicht beide Null sind.

Aufgabe 3.6

Sei $0 < \varepsilon < 1$. Ermitteln Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen. Geben Sie diese in der Intervallschreibweise an.

a) $|x - 1| < \varepsilon,$

b) $|x + 3| > \varepsilon,$

c) $|x^2 - 1| \leq \varepsilon,$

d) $|x^2 - 2| \geq \varepsilon.$

Aufgabe 3.7

Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: $|a - b| = |b - a|.$

b) Zeigen Sie die *umgekehrte Dreiecksungleichung* $||a| - |b|| \leq |a - b|.$