

## Vorkurs Mathematik: Arbeitsblatt 7

---

### Aufgabe 7.1

Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen, und geben Sie jeweils Real- und Imaginärteil an.

a)  $(1 + i)^2$ ,

b)  $\frac{1}{2 - i}$ ,

c)  $\frac{1 - 2i}{1 + 3i}$ ,

d)  $(5 - i)(6 - i) + \frac{5 - i}{6 - i}$ ,

e)  $(1 - i)^{16}$ ,

f)  $\left(\frac{2 + i}{3 - 2i}\right)^2$ .

### Aufgabe 7.2

Zeigen Sie, daß für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt:

a)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ ,

b)  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ ,

c)  $|\bar{z}| = |z|$ ,

d)  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ .

### Aufgabe 7.3

Beweisen Sie die sogenannte *Parallelogramm-Identität*:

$$\forall z, w \in \mathbb{C} : |z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

### Aufgabe 7.4

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von  $\mathbb{C}$  in der Gaußschen Zahlenebene.

a)  $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < \operatorname{Re}(iz) \leq 3\}$ ,

b)  $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1 + i| = |z - 3 - 3i|\}$ ,

c)  $M_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) \leq 1\}$ ,

d)  $M_4 := \{z \in \mathbb{C} \mid |2z + 4i - 6| \leq 8\}$ .

### Aufgabe 7.5

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen.

a)  $z^2 + z + 1 = 0$ ,

b)  $2z^2 - 4z + 1 = i\sqrt{3}$ ,

c)  $z^3 + 3z^2 + 5z + 3 = 0$ ,

d)  $z^3 - 6iz^2 - 11z + 6i = 0$ .

### Aufgabe 7.6

Bestimmen Sie eine komplexe Zahl  $w \in \mathbb{C}$  so, daß die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto w \cdot z$  in der Gaußschen Zahlenebene die Drehung um  $30^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn beschreibt.

### Aufgabe 7.7

Bestimmen Sie die komplexen dritten Einheitswurzeln, also diejenigen  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z^3 = 1$ , und geben Sie jeweils Real- und Imaginärteil an.