

Vorkurs Mathematik: Arbeitsblatt 8

Aufgabe 8.1

Zeigen Sie, daß für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) $x \neq 0$, und es gibt *kein* $t \in \mathbb{R}$ mit $y = t \cdot x$,
- (b) $y \neq 0$, und es gibt *kein* $s \in \mathbb{R}$ mit $x = s \cdot y$,
- (c) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt: Ist $\lambda x + \mu y = 0$, so folgt $\lambda = \mu = 0$.

Machen Sie sich anschaulich klar, was diese äquivalenten Bedingungen geometrisch aussagen.

Aufgabe 8.2

(1) Finden Sie zu den folgenden in Parameter-Darstellung gegebenen Geraden jeweils eine lineare Gleichung, deren Lösungsmenge gleich der Geraden ist.

- a) $G_1 := (6, 2) + \mathbb{R}(3, 2)$,
- b) $G_2 := (1, 2) + \mathbb{R}(1, -3)$.

(2) Geben Sie zu den folgenden linearen Gleichungen die Lösungsmenge als Gerade in Parameter-Darstellung an.

- a) $x_1 - 4x_2 = 9$,
- b) $3x_1 + x_2 = -1$.

Aufgabe 8.3

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme, und skizzieren Sie jeweils die Lösungsmenge in der Ebene.

- a)
$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & 4 \\ 2x_1 - 5x_2 & = & -19 \end{array}$$
,
- b)
$$\begin{array}{rcl} 3x_1 - 6x_2 & = & 18 \\ -5x_1 + 10x_2 & = & -30 \end{array}$$
,
- c)
$$\begin{array}{rcl} -2x_1 + 6x_2 & = & -6 \\ 7x_1 - 21x_2 & = & 20 \end{array}$$
,
- d)
$$\begin{array}{rcl} -3x_1 + x_2 & = & -2 \\ 2x_1 - x_2 & = & 1. \end{array}$$

Aufgabe 8.4

- a) Finden Sie für die Ebene $E_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -6\}$ eine Parameter-Darstellung, also $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ mit $E_1 = u + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w$.
- b) Finden Sie eine lineare Gleichung, deren Lösungsmenge die folgende Ebene ist:

$$E_2 := (1, -1, 1) + \mathbb{R}(-1, 0, 1) + \mathbb{R}(2, 1, 2).$$

Aufgabe 8.5

Berechnen Sie den Schnitt der Ebenen $E_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - 3x_3 = 6\}$ und $E_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 3\}$, und stellen Sie diesen ggf. in Parameter-Gestalt dar.

Aufgabe 8.6

Berechnen Sie den Schnitt der Geraden $G := (2, 1, 2) + \mathbb{R}(-2, 1, -1)$ mit der Ebene, die durch die drei Punkte $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 3)$ und $(3, 2, 0)$ verläuft.

Aufgabe 8.7

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rclcl} 3x_1 & + & -6x_2 & + & 3x_3 & = & -33 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 10x_3 & = & -47 \\ -2x_1 & + & 11x_2 & + & 16x_3 & = & 3 \end{array}$$

Aufgabe 8.8

Beweisen Sie unter Verwendung der Rechenregeln (S1)-(S3) den *verallgemeinerten Satz von Pythagoras*:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle,$$

und machen Sie sich im Fall $n = 2$ anschaulich klar, dass dies tatsächlich den bekannten Satz von Pythagoras beinhaltet.