CAU Kiel
Mathematisches Seminar/PerLe
Dr. Alexander Ullmann, Dr. Patryk Brzezinski

Vorkurs Mathematik: Arbeitsblatt 9

Aufgabe 9.1

Es seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ mathematische Aussagen. Zeigen Sie ohne das Aufstellen einer Wahrheitstafel, daß gilt

$$\big[(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})\big] \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}),$$

indem Sie konsequent die Beweistechnik zum Beweisen von Implikationen anwenden.

Aufgabe 9.2

Es seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion, sowie $A, B \subseteq X$ und $C, D \subseteq Y$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) $f(A \backslash B) = f(A) \backslash f(B)$,

b) $f^{-1}(C \backslash D) = f^{-1}(C) \backslash f^{-1}(D)$,

c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$,

d) $A = f^{-1}(f(A))$.

Aufgabe 9.3

Die folgende Aufgabe ist einem Einführungskurs Mathematik an der Universität Konstanz entnommen, und dient der Übung des typischen Vorgehens beim Beweisen mathematischer Aussagen. Dabei werden bewußt irrelevante Begriffe ohne konkreten Sinn (aber mit einer exakten mathematischen Definition!) gewählt. Die Namen der Eigenschaften sind bewußt verwirrend gewählt, um Sie zu zwingen, jeweils genau in den Definitionen nachzusehen, wenn Sie ein Konzept benutzen bzw. nachweisen wollen. Das Vorgehen, das mit dieser Aufgabe trainiert werden soll, ist typisch und wesentlich in der Mathematik!

Definition 1. Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt *dummbrumm*, falls ein $m \in \mathbb{N}$ existiert so, daß $\frac{x-3}{4} = m$. Die Zahl x heißt *brummdumm*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x = 2n - 5$.

Definition 2. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *schnickschnack*, falls $f(x)$ dummbrumm ist für alle $x \in \mathbb{R}$, die brummdumm sind. Die Funktion heißt *schnackschnick*, falls $f(x)$ brummdumm ist für alle $x \in \mathbb{R}$, die dummbrumm sind.

Definition 3. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ heißt *pingpong*, wenn für jede Funktion f, die schnackschnick ist, auch $T(f)$ schnackschnick ist. Die Funktion T heißt *pongping*, falls das Bild von schnickschnack Funktionen schnickschnack ist.

a) Beweisen Sie die folgende Aussage für alle $x \in \mathbb{R}$: Wenn x dummbrumm ist, dann ist x auch brummdumm.

b) Gilt auch die Umkehrung des Satzes?

c) Zeigen Sie mithilfe von a) für alle $f \in \mathcal{F}$, daß f schnackschnick ist, wenn f schnickschnack ist.

d) Benutzen Sie das Beispiel $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x+5$, um zu zeigen, daß die Umkehrung von Satz c) nicht richtig ist.

e) Untersuchen Sie, ob die Funktion $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}, f \mapsto 2f + 1$ pingpong oder pongping ist (für $f \in \mathcal{F}$ bezeichnet hierbei $2f$ die Funktion $2f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2 \cdot f(x)$).

f) Zeigen Sie, daß die Hintereinanderausführung von zwei pingpong Funktionen wieder pingpong ist.

Aufgabe 9.4
Es seien X, Y, Z nicht-leere Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Zeigen Sie:

a) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv,

b) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv.

Zeigen Sie ferner, daß die Implikationen

„$g \circ f$ injektiv $\Rightarrow g$ injektiv“ und „$g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow f$ surjektiv“

im allgemeinen falsch sind.