

Jan Kallsen

**Lévy-Prozesse  
anschaulich erklärt**

Gegenstand dieses Textes ist die Beschreibung zufälliger dynamischer Phänomene. Betrachten wir etwa ein System, dessen Zustand durch eine Zahl (in  $\mathbb{R}$ ) oder einen Vektor (in  $\mathbb{R}^d$ ) beschrieben wird. Dies kann z. B. der Ort eines Teilchens oder der Kurs einer Aktie sein. Wenn wir diesen Zustand als zufällig ansehen, benutzen wir zu seiner mathematischen Beschreibung eine zufällige Zahl (bzw. einen zufälligen Vektor), d. h. eine *Zufallsvariable*  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Uns soll es jetzt aber um die *Dynamik* des Systems gehen, also um die Änderung seines Zustandes in der Zeit. In der deterministischen Welt beschreiben wir diesen Verlauf durch eine *Funktion*  $X : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ , d. h.  $X_t \in \mathbb{R}^d$  gibt den Zustand des Systems zur Zeit  $t \in \mathbb{R}_+$  wieder. Der Übergang zu zufälligen dynamischen Phänomenen liegt auf der Hand. Wir beschreiben sie durch zufällige Funktionen  $X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Nun gibt  $X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$  den augenblicklichen Zustand des Systems wieder, wobei dessen Zufälligkeit durch  $\omega \in \Omega$  repräsentiert wird. Solche zufälligen Funktionen nennt man *stochastische Prozesse*. Die Funktionen  $t \mapsto X_t(\omega)$  für festes  $\omega$  nennt man die *Pfade* des Prozesses. Man kann einen stochastischen Prozeß auch als Ansammlung von Zufallsvariablen  $X_t$  auffassen, für jeden Zeitpunkt  $t$  eine.

Wir wollen zufällige dynamische Phänomene aber nicht nur beschreiben, sondern auch Schlüsse aus dieser Beschreibung ziehen. In der Analysis betrachtet man dazu zunächst sehr einfache, nämlich *lineare* Funktionen und geht später zu allgemeineren, etwa differenzierbaren, über, die sich zumindest im Kleinen wie lineare Funktionen verhalten. Genauso wollen wir in der nicht-deterministischen Welt verfahren. In diesem einführenden Text wenden wir uns den „linearen“ stochastischen Prozessen zu, an anderer Stelle den lokal linearen. Doch hier taucht schon das erste Problem auf: Was ist denn die zufällige Entsprechung der linearen Funktionen? Wir werden unten darlegen, daß sich die sogenannten *Lévy-Prozesse* als natürlicher Kandidat anbieten. Sie bilden übrigens eine sehr viel abwechslungsreichere Familie als ihre deterministischen Verwandten.

Im Grunde sind lineare Funktionen nicht die einfachsten Funktionen, sondern die zweiteinfachsten. Die einfachsten wären konstante Funktionen, aber die werden schnell langweilig. Lineare Funktionen hingegen stehen für konstanten *Zuwachs*, d. h. in gleich langen Intervallen  $(s, s + \Delta t]$  und  $(t, t + \Delta t]$  ist ihr jeweiliger Zuwachs  $X_{s+\Delta t} - X_s$  bzw.  $X_{t+\Delta t} - X_t$  gleich groß. Lineare Funktionen sind noch in einer weiteren Hinsicht einfach: Sie lassen sich abgesehen vom Startwert  $X_0$  durch eine einzige Zahl  $b \in \mathbb{R}$  (für  $d = 1$ ) bzw. allgemeiner einen Vektor  $b \in \mathbb{R}^d$  vollständig beschreiben in dem Sinne, daß  $X_t = X_0 + bt$ . Die *Steigung*  $b$  beschreibt das Zuwachsverhalten der Funktion. Um  $b$  zu bestimmen, brauchen wir die lineare Funktion  $X$  außer in 0 nur an einer einzigen Stelle  $t \neq 0$  zu kennen.

Man könnte nun eine zufällige lineare Funktion so definieren, daß die Steigung  $b$  zufällig gewählt wird. Dies führt jedoch nicht zu einem sehr interessanten mathematischen Objekt. Stattdessen soll der Begriff *konstantes Wachstum* stochastisch aufgefaßt

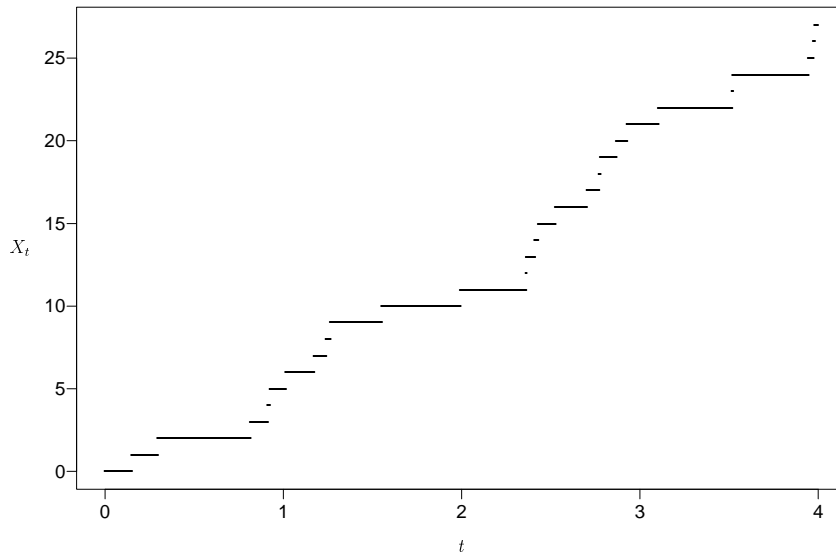


Abbildung 1: Kundenzählung in einem Geschäft

werden. Wir interpretieren ihn so, daß die Zuwächse (oder *Inkremete*)  $X_{s+\Delta t} - X_s$  und  $X_{t+\Delta t} - X_t$  die gleiche *Verteilung* besitzen. Ferner sei noch vorausgesetzt, daß die Zuwächse über disjunkte Intervalle voneinander unabhängige Zufallsvariablen sind und daß der Prozeß in  $X_0 = 0$  startet. Solche Prozesse mit *stationären und unabhängigen Zuwächsen* nennt man auch *Lévy-Prozesse*, und wir wollen sie als stochastisches Analogon der linearen Funktion auffassen. Beispiele für solche Phänomene finden sich zuhauf:

1.  $X_t$  sei die Zahl der Kunden, die bis zur Zeit  $t$  ein Geschäft betreten. Wenn man tageszeitliche und saisonale Schwankungen, Gruppen usw. außer Acht läßt, läßt sich dieses Phänomen in guter Näherung durch einen Lévy-Prozeß beschreiben (Abb. 1).
2. Ein Beispiel aus der Versicherungsmathematik bildet die Gesamtsumme  $X_t$  der bis zur Zeit  $t$  bei einer Versicherungsgesellschaft eingegangenen Schadensmeldungen. Unter leicht idealisierten Annahmen kann wiederum davon ausgegangen werden, daß der Prozeß  $X$  stationäre, unabhängige Zuwächse besitzt (Abb. 2).
3. Ein mikroskopisches Teilchen bewegt sich aufgrund der thermischen Molekularbewegung in einer Flüssigkeit (Abb. 3). Mit  $X_t \in \mathbb{R}^3$  bezeichnen wir den Ort des Teilchens zur Zeit  $t$ . In guter Näherung hat der dadurch entstehende stochastische Prozeß  $X$  (Abb. 4) stationäre und unabhängige Zuwächse.

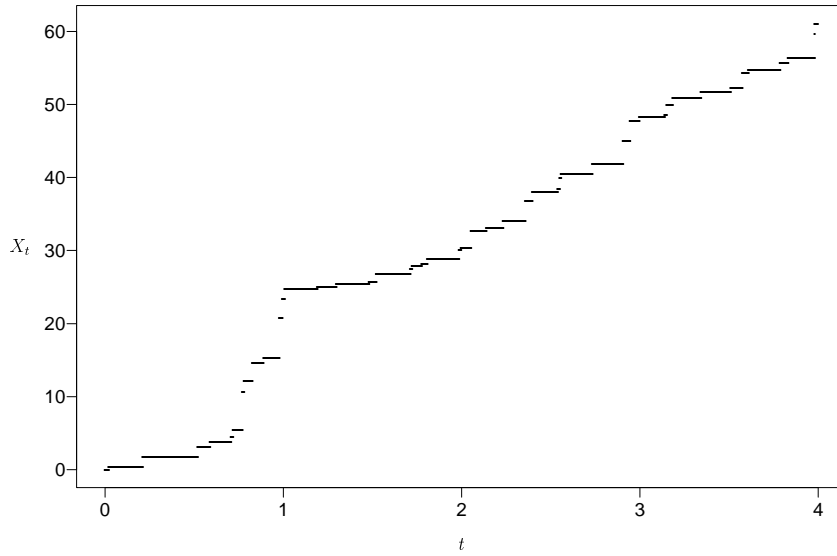


Abbildung 2: Summe der eingegangenen Schadensmeldungen

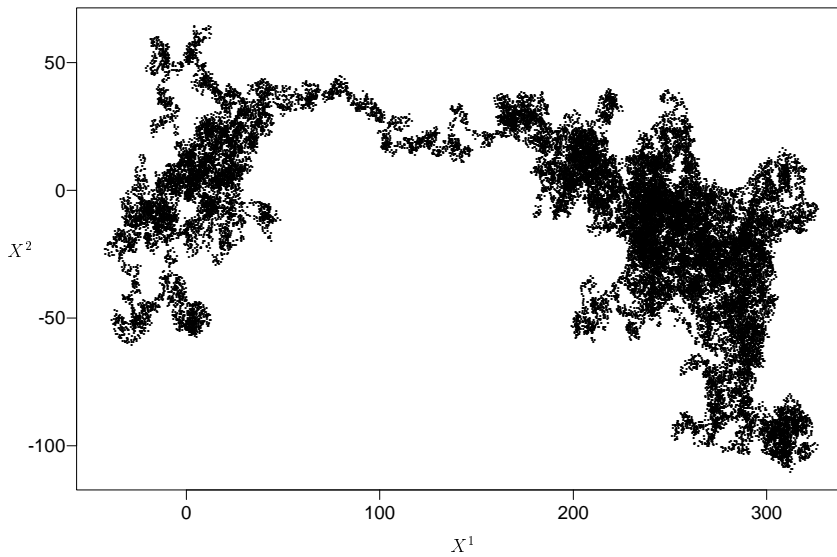


Abbildung 3: Bewegung eines mikroskopischen Teilchens, von oben betrachtet

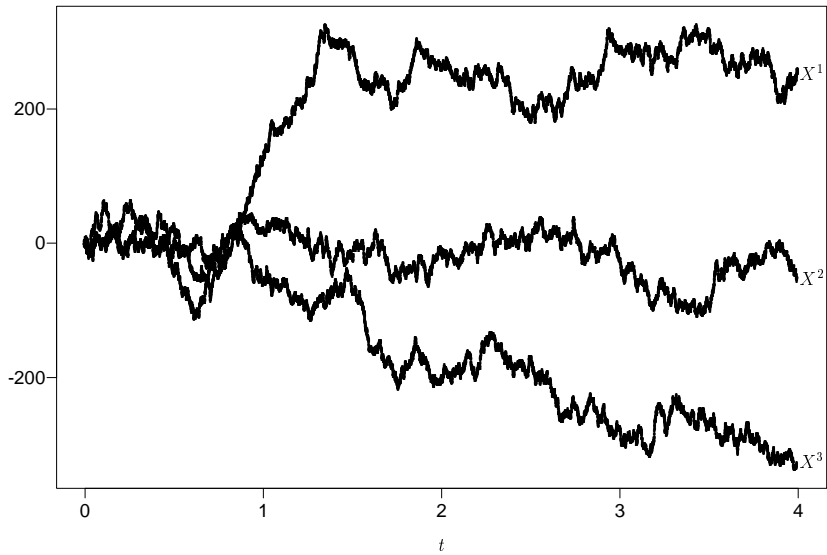


Abbildung 4: Die Koordinaten von  $X = (X^1, X^2, X^3)$  als Funktion von  $t$

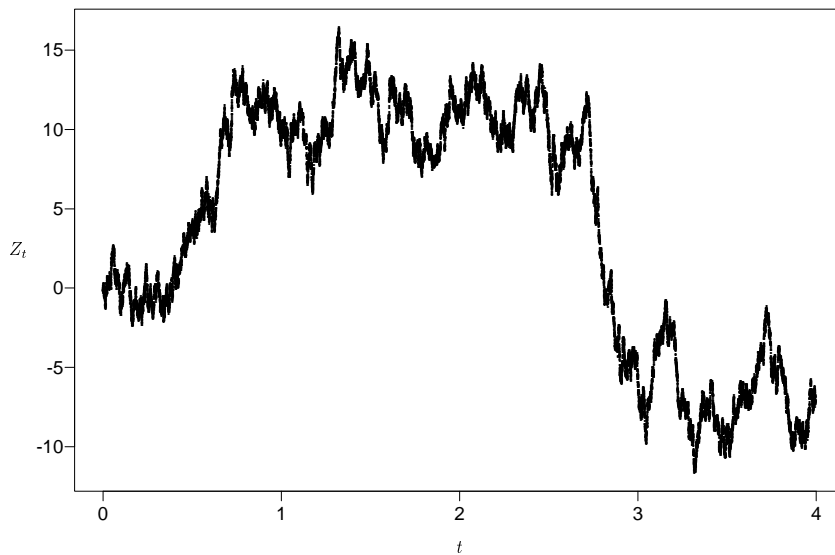


Abbildung 5: logarithmierte Aktienkurse

4. Schon vor über einhundert Jahren bemerkte *Bachelier*, daß sich Kursänderungen an der Börse in guter Näherung als unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen auffassen lassen und somit der Kurs  $X$  eines Wertpapiers einen Lévy-Prozeß bildet. Heute neigt man eher dazu, den Logarithmus  $Z = \log(X)$  durch einen Lévy-Prozeß zu modellieren (Abb. 5). Die absoluten Wertänderungen nehmen nämlich mit dem Kurs der Aktie zu, während die *relativen* Änderungen (d.h. der prozentuale Zuwachs oder Verfall) vom Kurs weitgehend unabhängig sind.

Wie lassen sich Lévy-Prozesse nun aber konkret beschreiben? Der Einfachheit halber betrachten wir den Fall  $d = 1$ , d. h. eindimensionale Prozesse. Bekanntlich läßt sich die Verteilung einer Zufallsvariablen durch deren Fouriertransformierte charakterisieren. Dieses Hilfsmittel wird sich auch hier als nützlich erweisen. Wir wollen versuchen herauszufinden, welche Gestalt die charakteristische Funktion von  $X_t$  für gegebenes  $t \in \mathbb{R}_+$  haben kann. Dazu schreiben wir  $X_t$  als Summe  $\sum_{n=1}^{\frac{t}{dt}} (X_{ndt} - X_{(n-1)dt})$  von Zuwächsen über sehr kurze, gewissermaßen „infinitesimale“ Zeitintervalle  $((n-1)dt, ndt]$ . Diese Inkremente besitzen bei einem Lévy-Prozeß alle dieselbe Verteilung, nämlich die der Zufallsvariablen  $X_{dt} - X_0 = X_{dt}$ . Da die charakteristische Funktion einer Summe unabhängiger Zufallsvariablen das Produkt der einzelnen charakteristischen Funktionen ist, ergibt sich  $\hat{X}_t = (\hat{X}_{dt})^{\frac{t}{dt}}$ . Wenn sich die Fouriertransformierte von  $X_{dt}$  als  $\hat{X}_{dt}(\cdot) = \exp(\psi(\cdot)dt)$  für eine Funktion  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  schreiben läßt (d. h. falls sie den Wert 0 nicht annimmt), erhalten wir  $\hat{X}_t(\cdot) = \exp(\psi(\cdot)t)$ . Wir sehen also, daß der Logarithmus der charakteristischen Funktion von  $X_t$  linear von  $t$  abhängt, wenn wir großzügig von der Mehrdeutigkeit des komplexen Logarithmus absehen.

Die Funktion  $\psi$  wollen wir genauer bestimmen, indem wir uns die Zufallsvariable  $X_{dt}$  näher ansehen. Wegen  $E(X_t) = \frac{E(X_{dt})}{dt}t$  muß ihr Erwartungswert von der Größenordnung  $dt$  sein, also etwa  $E(X_{dt}) = b dt$  für ein  $b \in \mathbb{R}$ . Im einfachsten Fall ist  $X_{dt}$  deterministisch und stimmt mit seinem Erwartungswert überein, d. h.  $X_{dt} = b dt$ . Für die charakteristische Funktion gilt dann  $\hat{X}_{dt}(u) = \exp(iub dt)$ . Auch falls  $X_{dt}$  nicht deterministisch ist, gilt wegen der Unabhängigkeit der Zuwächse  $\text{Var}(X_t) = \frac{\text{Var}(X_{dt})}{dt}t$ , d. h. auch die Varianz von  $X_{dt}$  muß von der Größenordnung  $dt$  sein. Wir wollen zwei Spezialfälle betrachten, in denen die mittlere quadratische Abweichung diese Eigenschaft besitzt.

Zunächst geben wir uns eine feste Wahrscheinlichkeitsverteilung  $Q$  auf  $\mathbb{R}$  mit charakteristischer Funktion  $\hat{Q}$  vor. Dieses Maß soll gewissermaßen ein erster Kandidat für die Verteilung des Zuwachses  $X_{dt}$  sein. Damit die Varianz aber letztlich die richtige kleine Größenordnung  $dt$  besitzt, wandeln wir  $Q$  auf zwei verschiedene Arten ab. In der ersten Variante wächst der Prozeß  $X$  mit Wahrscheinlichkeit  $\lambda dt$  entsprechend der Verteilung  $Q$ , während er mit Wahrscheinlichkeit  $1 - \lambda dt$  konstant bleibt, wobei  $\lambda > 0$  gegeben ist (Abb. 6). Anschließend betrachten wir die Alternative, daß  $Q$  die Vertei-

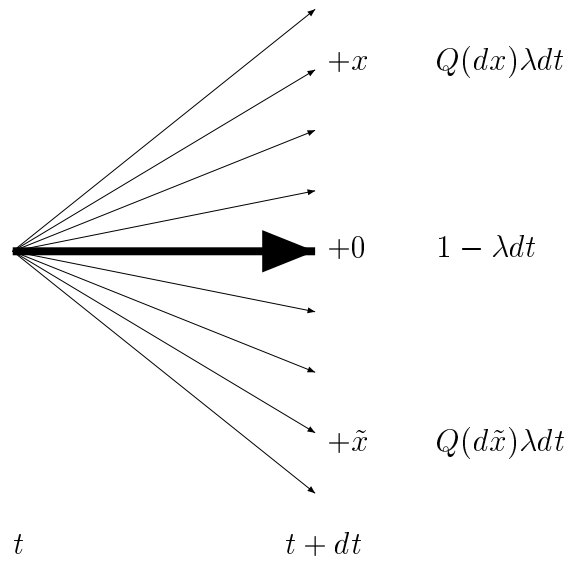


Abbildung 6: Änderung von  $X$  in einem infinitesimalen Intervall

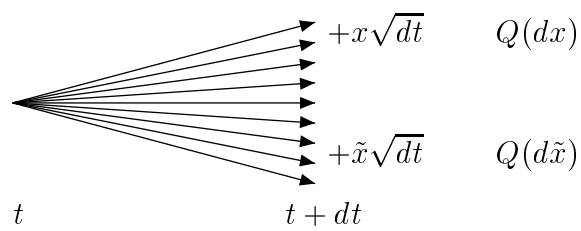


Abbildung 7: Änderung von  $X$  in einem infinitesimalen Intervall

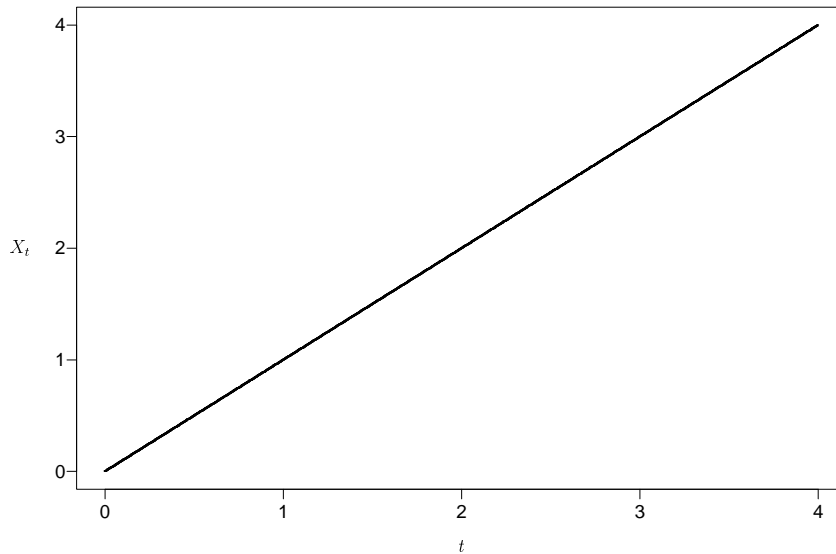


Abbildung 8: lineare Funktion

lung von  $\frac{1}{\sqrt{dt}}X_{dt}$  ist (Abb. 7);  $X_{dt}$  ist also von der Größenordnung  $\sqrt{dt}$ . Im ersten Fall hat die Varianz die kleine Größenordnung  $dt$ , da der Prozeß in dem kurzen Intervall nur mit *kleiner Wahrscheinlichkeit* springt; im zweiten Fall liegt dies daran, daß die *Größe* der Zuwächse von kleiner Größenordnung ist.

Betrachten wir aber zunächst die erste Alternative. Die charakteristische Funktion von  $X_{dt}$  ist in diesem Fall  $\hat{X}_{dt} = (1 - \lambda dt) + \lambda dt \hat{Q} = 1 + \lambda dt(\hat{Q} - 1)$ . Wegen  $e^x \approx 1 + x$  für kleine  $x$  läßt sich dies schreiben als  $\hat{X}_{dt}(u) \approx \exp(\lambda(\hat{Q}(u) - 1)dt) = \exp(\int (e^{iux} - 1)\lambda Q(dx)dt)$ .

Für den Fall, daß  $Q$  die Verteilung von  $\frac{X_{dt}}{\sqrt{dt}}$  ist, folgt  $\hat{X}_{dt}(u) = \hat{Q}(u\sqrt{dt})$ . Wir nehmen nun zusätzlich an, daß der Erwartungswert von  $\frac{X_{dt}}{\sqrt{dt}}$  0 ist, d. h.  $\int xQ(dx) = 0$ . Wegen  $\hat{Q}(0) = 1$  und  $\hat{Q}'(0) = i \int xQ(dx) = 0$  ergibt die Entwicklung von  $\hat{Q}$  in eine Taylorreihe 2. Ordnung  $\hat{X}_{dt}(u) \approx 1 + \frac{1}{2}\hat{Q}''(0)u^2dt$ . Mit  $e^x \approx 1 + x$  und der Bezeichnung  $c := -\hat{Q}''(0)$  erhalten wir  $\hat{X}_{dt}(u) \approx \exp(-\frac{1}{2}cu^2dt)$ . Man beachte, daß von  $Q$  in dieser Näherung nur dessen Varianz  $\int x^2Q(dx) = -\hat{Q}''(0) = c$  eingeht.

Wir haben also drei Arten von Lévy-Prozessen kennengelernt. Im einfachsten Fall ist  $X$  nichts anderes als eine deterministische lineare Funktion, und es gilt  $X_t = bt$  für ein  $b \in \mathbb{R}$  (Abb. 8). Im ersten nichtdeterministischen Fall springt der Prozeß in kurzen Intervallen der Länge  $dt$  mit der Wahrscheinlichkeit  $\lambda dt$ , und zwar in diesem Fall mit der *Sprungverteilung*  $Q$ . Zwischen den Sprüngen bleibt der Prozeß konstant. Von dieser Art ist etwa das Beispiel 1, in dem die Zahl der Kunden gezählt wird, die ein Geschäft betreten (Abb. 1). Die *Sprungintensität*  $\lambda$  ist in diesem Fall die mittlere Zahl an Kunden, die pro Zeiteinheit das Geschäft betreten. Da sich der Prozeß bei jeder



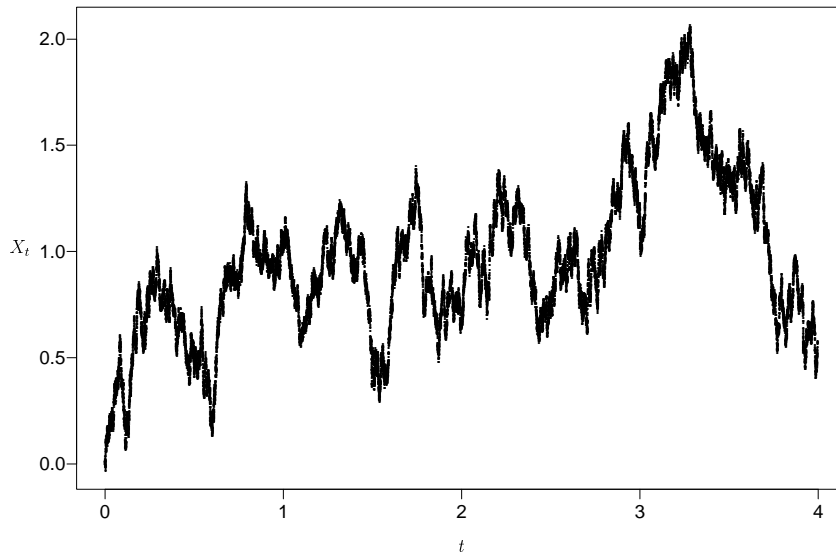


Abbildung 9: Brownsche Bewegung

Ankunft eines Kunden, also bei jedem Sprungereignis, um eins erhöht, gilt hier  $Q = \varepsilon_1$ , die Einpunktmass in 1. Einen solchen Lévy-Prozeß, der sich nur durch Sprünge der Größe  $+1$  verändert, nennt man *Poisson-Prozeß*.

Auch Beispiel 2 paßt in diese Kategorie (Abb. 2). Die Sprungintensität  $\lambda$  ist in diesem Fall die Rate, mit der Schadensfälle bei der Versicherung eingehen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $Q$ , die die Größe eines zufällig eintreffenden Schadens beschreibt, liefert gerade die Sprungverteilung des Lévy-Prozesses. In dieser im Gegensatz zur Kundenzählung etwas allgemeineren Situation, wo das Sprungmaß  $Q$  nicht notwendigerweise mit der Einpunktmass in 1 übereinstimmt, spricht man von einem *zusammengesetzten Poisson-Prozeß*.

Der zweite nichtdeterministische Fall ist von subtilerer Natur. Wir haben gesehen, daß sich die Variation des Prozesses nicht aus seltenen großen Sprüngen speist, sondern aus vielen kleinen Änderungen, die in der Zeit  $dt$  die Größenordnung  $\sqrt{dt}$  besitzen. Da  $\sqrt{dt}$  für  $dt \rightarrow 0$  ebenfalls gegen 0 konvergiert, hat der entstehende Prozeß stetige Pfade (Abb. 9). Differenzierbar sind diese jedoch nicht, da  $\sqrt{dt}$  deutlich langsamer als  $dt$  verschwindet. Funktionen dieser Art, die zwar stetig, aber nirgends differenzierbar sind, tauchen in der deterministischen Analysis höchstens als pathologische Sonderfälle auf. In der Stochastik begegnen wir Ihnen schon bei der Untersuchung der fundamentalsten Prozesse.

In diese Kategorie, die man *Brownsche Bewegung* oder *Wiener-Prozeß* nennt, gehören Beispiele 3 und 4. Bei der thermischen Diffusion leuchtet dies ein, da sich der Ort des Teilchens stetig und nicht durch Sprünge verändert. Dieses vom Botaniker

*Brown* unter dem Mikroskop beobachtete Phänomen lieferte auch die übliche Bezeichnung dieses Prozesses, auch wenn dessen mathematische Behandlung erst durch *Einstein* erfolgte und später von *Wiener* auf ein solides Fundament gestellt wurde. Schon einige Jahre vor Einstein wurde die Brownsche Bewegung als Modell für Wertpapierkursverläufe von *Bachelier* vorgeschlagen, dessen Arbeit jedoch für ein halbes Jahrhundert nahezu in Vergessenheit geriet. Bei dieser Anwendung liegt weniger auf der Hand, warum es sich um einen stetigen Lévy-Prozeß handeln soll. In der Tat werden heute Kursentwicklungen zunehmend mit Hilfe von Sprungprozessen beschrieben, die eher dem zuvor behandelten Typ zuzuordnen sind.

Bisher haben wir drei konkrete Arten von Lévy-Prozessen kennengelernt. Gibt es noch weitere? Wenn man unabhängige Lévy-Prozesse addiert, so hat der Summenprozeß ebenfalls stationäre und unabhängige Zuwächse. Da dessen Fouriertransformierte das Produkt der einzelnen charakteristischen Funktionen ist, erhalten wir für einen Lévy-Prozeß  $X$ , der aus je einem Prozeß der obigen Typen zusammengesetzt ist:

$$\hat{X}_{dt}(u) = \exp \left( \left( iub + \int (e^{iux} - 1) \lambda Q(dx) - \frac{1}{2} u^2 c \right) dt \right).$$

Wegen  $\hat{X}_t = (\hat{X}_{dt})^{\frac{t}{dt}}$  ergibt sich

$$\hat{X}_t(u) = \exp \left( \left( iub - \frac{1}{2} u^2 c + \int (e^{iux} - 1) F(dx) \right) t \right), \quad (1)$$

wobei wir das Produkt  $\lambda Q$  zu einem Maß  $F$  mit Gesamtmasse  $\lambda$  zusammengefaßt haben. Alternativ können wir  $\hat{X}_t$  in der Form

$$\hat{X}_t(u) = \exp \left( \left( iu\tilde{b} - \frac{1}{2} u^2 c + \int (e^{iux} - 1 - iux) F(dx) \right) t \right), \quad (2)$$

mit  $\tilde{b} = b + \int x F(dx)$  schreiben, was zwar umständlicher aussieht, aber – wie wir gleich sehen werden – den Erwartungswert von  $X_t$  leichter erkennen läßt (Abb. 10).

Am Tripel  $(\tilde{b}, c, F)$  kann man verschiedene Eigenschaften des Prozesses ablesen. Wegen  $E(X_t) = \frac{1}{i} \hat{X}'_t(0) = \tilde{b}t$  beschreibt  $\tilde{b} \in \mathbb{R}$  den Erwartungswert von  $X_t$ , der übrigens stets linear von  $t$  abhängt. Wie wir schon vorher bemerkt haben, kann man am Lévy-Maß  $F$  das Sprungverhalten des Prozesses ablesen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er innerhalb eines gegebenen Intervalls der infinitesimalen Länge  $dt$  einen Sprung hat, dessen Höhe in einer vorgegebenen Menge  $A \subset \mathbb{R}$  liegt, ist  $F(A)dt$ . Etwas mathematischer formuliert: In einem Zeitintervall der Länge 1 beobachten wir im Mittel  $F(A)$  Sprünge, deren Höhe in  $A$  liegt. Insbesondere ist  $F(\mathbb{R})$  die mittlere Zahl der Sprünge überhaupt, die in einem Einheitsintervall auftreten. Auf die Bedeutung des Parameters  $c \in \mathbb{R}$  werden wir später näher eingehen, da er schwieriger zu verstehen ist. An dieser Stelle sei lediglich erwähnt, daß  $\text{Var}(X_t) = E(X_t^2) - (E(X_t))^2 =$

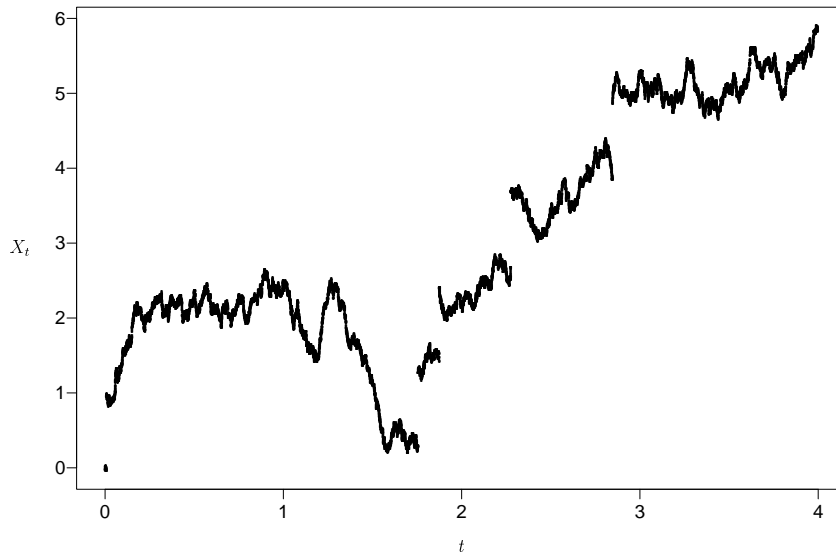


Abbildung 10: Lévy-Prozeß mit Tripel  $(\tilde{b}, c, F) = (1, 1, \varepsilon_1)$

$-\hat{X}_t''(0) - (\frac{1}{t}\hat{X}_t'(0))^2 = \tilde{b}^2 t^2 + ct + \int x^2 F(dx)t - \tilde{b}^2 t^2 = (c + \int x^2 F(dx))t$ . Die Varianz des Prozesses wird also aus zwei Quellen gespeist: aus den Sprüngen, die durch das Maß  $F$  repräsentiert werden, und aus einer stetigen Zitterbewegung, deren Stärke durch den Parameter  $c$  beschrieben wird.

Die Frage, ob durch die Formel (2) alle Lévy-Prozesse abgedeckt werden, haben wir noch nicht beantwortet. In der Tat gibt es noch weitere, die aber nur geringfügige Modifikationen von Gleichung (2) erfordern. Leider ist die daraus entstehende *Lévy-Chintschin-Formel* etwas schwieriger intuitiv zu erfassen als die oben angegebene. Die zwei Arten von Lévy-Prozessen, die wir bisher außer acht gelassen haben, lassen sich leicht charakterisieren: Sie haben zu viele oder zu große Sprünge. Wenden wir uns zunächst dem ersten Typ zu. Neben den bisher betrachteten Prozessen, die auf einem endlichen Intervall höchstens endlich viele Sprungstellen besitzen, gibt es auch solche, die (abzählbar) unendlich oft springen, wobei allerdings die meisten Sprünge sehr klein sind. Mathematisch bedeutet dies, daß das Lévy-Maß  $F$  kein endliches Maß zu sein braucht. Man kann jedoch zeigen, daß stets  $F(\mathbb{R} \setminus [-1, 1]) < \infty$  und  $\int_{\{|x| \leq 1\}} x^2 F(dx) < \infty$  gilt. Die mittlere Zahl der „großen“ Sprünge (etwa vom Betrage her größer als 1) ist also stets endlich, wobei die Grenze 1 hier völlig willkürlich gewählt wurde. Kleine Sprünge kann es zwar unendlich viele geben, aber auch nicht „zu viele“ im Sinne der zweiten Bedingung. Im Falle zu vieler Sprünge kann es vorkommen, daß Formel (1) sinnlos wird, da  $x \mapsto e^{iux} - 1$  nicht nach  $F$  integrierbar ist. Gleichung (2) hingegen brauchen wir nicht zu modifizieren, sondern nur die Menge der betrachteten Lévy-Maße  $F$  auszudehnen.

Was bedeutet es, daß der Prozeß zu große Sprünge besitzt? Mathematisch soll das heißen, daß  $\int_{\{|x|>1\}} |x|F(dx) = \infty$ . Da  $|e^{iux} - 1 - iux|$  für große  $|x|$  die Größenordnung  $|x|$  besitzt, existiert somit das Integral  $\int (e^{iux} - 1 - iux)F(dx)$  in Formel (2) nicht. Da  $x \mapsto e^{iux} - 1$  beschränkt und  $F(\mathbb{R} \setminus [-1, 1])$  endlich ist, existiert aber stets  $\int_{\{|x|>1\}} (e^{iux} - 1)F(dx)$ . Für kleine  $|x|$  hingegen ist  $|e^{iux} - 1 - iux|$  von der Größenordnung  $|x|^2$ . Wegen  $\int_{\{|x|\leq 1\}} x^2 F(dx) < \infty$  existiert somit  $\int_{\{|x|\leq 1\}} (e^{iux} - 1 - iux)F(dx)$ . Um möglicherweise undefinierte Integrale zu umgehen, wandeln wir Formel (2) in folgender Weise ab:

$$\boxed{\hat{X}_t(u) = \exp \left( \left( iub(h) - \frac{1}{2}u^2c + \int (e^{iux} - 1 - iux)F(dx) \right) t \right),} \quad (3)$$

wobei  $h(x) := x1_{\{|x|\leq 1\}}$ . Ein Vergleich mit den Gleichungen (1) und (2) zeigt, daß dann  $b(h) = b + \int h(x)F(dx) = \tilde{b} + \int (x - h(x))F(dx)$ , falls der Lévy-Prozeß die früheren Darstellungen erlaubt, d. h. falls er nicht zu wild springt. Mit Gleichung (3), der sogenannten *Lévy-Chintschin-Formel*, haben wir eine Darstellung gefunden, die alle Lévy-Prozesse abdeckt. Gleichzeitig haben wir die Funktion  $\psi$  in der ursprünglichen Formulierung  $\hat{X}_t(u) = \exp(\psi(u)t)$  der Fouriertransformierten genauer bestimmt. Das Tripel  $(b(h), c, F)$  aus Zahlen  $b(h) \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}_+$  und einem Lévy-Maß  $F$  mit  $\int \min(1, x^2)F(dx) < \infty$  nennt man *Lévy-Chintschin-Tripel* des Prozesses. Man beachte, daß  $b(h)$  im allgemeinen von  $\tilde{b}$  in Gleichung (2) abweicht und daher auch nicht direkt zum Erwartungswert des Lévy-Prozesses führt. Wir werden später sehen, daß wir genau dann die allgemeinere Darstellung (3) wählen müssen, wenn  $E(|X_t|) = \infty$  gilt, d. h. wenn der Erwartungswert des Lévy-Prozesses gar nicht existiert. Wir werden ferner erkennen, daß dies ausschließlich eine Eigenschaft der großen Sprünge des Prozesses ist, daß er also in diesem Sinne zu große bzw. genauer zu viele große Sprünge besitzt.

Die Lévy-Chintschin-Formel bildet das Hauptergebnis dieser Einführung. An ihrer Komplexität kann man ablesen, um wieviel vielfältiger sich die Familie der „stochastischen linearen Funktionen“ im Vergleich zu ihren deterministischen Verwandten präsentiert. Insbesondere durch die Wahl des Lévy-Maßes erhält man Prozesse mit ganz verschiedenen Eigenschaften. Dennoch steht die Lévy-Chintschin-Formel gerade auch für die Einfachheit der Lévy-Prozesse, durch die sich auch schon die linearen Funktionen auszeichneten. Auch ein Lévy-Prozeß bzw. genauer dessen Verteilung wird durch wenige Größen eindeutig charakterisiert, zwar nicht durch eine einzige Zahl  $b$ , aber immerhin durch ein Tripel  $(b(h), c, F)$ . Ferner gilt analog zur Eigenschaft linearer Funktionen, daß die Verteilung von  $X_t$  für ein festes  $t \neq 0$  schon die Verteilung des ganzen Lévy-Prozesses festlegt. Das liegt daran, daß das Tripel  $(b(h), c, F)$  durch die charakteristische Funktion  $\hat{X}_t$  schon eindeutig bestimmt ist.

Wir wollen nun versuchen, uns ein intuitives Bild von einem allgemeinen Lévy-

Prozeß zu machen. Zuvor sei aber noch angemerkt, daß man in Formel (3) die angegebene Funktion  $h$  durch andere ähnliche *Abschneidefunktionen* ersetzen kann. Die einzige Bedingung ist, daß für kleine  $|x|$   $h(x) = x$  und für großes  $|x|$   $h(x) = 0$  gilt. Für manche Lévy-Prozesse sind auch andere Funktionen möglich, etwa  $h(x) = x$ , was zur Formel (2) führt, oder  $h(x) = 0$  wie in Gleichung (1). Aber wie schon erwähnt, ist eine solche Darstellung nicht in jedem Fall möglich. Im Lévy-Chintschin-Tripel  $(b(h), c, F)$  ändert sich bei einem Wechsel der Abschneidefunktion lediglich die sogenannte *Driftkomponente*  $b(h)$ ; und zwar gemäß der Gleichung  $b(\tilde{h}) = b(h) + \int (h(x) - \tilde{h}(x))F(dx)$ . Das folgende gilt in der Regel für beliebige Abschneidefunktionen; für die Vorstellung taugt aber das obige  $h$  sehr gut.

Um eine Idee davon zu gewinnen, wie ein allgemeiner Lévy-Prozeß aussieht, zerlegen wir ihn in eine Summe unabhängiger Prozesse von einfacher Struktur. Um es genauer zu sagen: Wir setzen einfache Ausgangsbausteine so zusammen, daß ein Prozeß mit stationären, unabhängigen Zuwächsen entsteht, dessen charakteristische Funktion durch die Lévy-Chintschin-Formel (3) gegeben ist. Wegen der stationären und unabhängigen Zuwächse ist die Verteilung und damit das typische Verhalten des Prozesses durch das Lévy-Chintschin-Tripel  $(b(h), c, F)$  schon eindeutig charakterisiert, d. h. alle Lévy-Prozesse mit gleichem Tripel sehen gewissermaßen gleich aus. Insofern kann man in der Tat davon sprechen, daß wir eine Vorstellung von der Gestalt eines allgemeinen Prozesses mit stationären, unabhängigen Zuwächsen bekommen.

Die Art der Bausteine ergibt sich direkt aus der charakteristischen Funktion (3). Sie ähneln denen, mit denen wir die Betrachtung der Lévy-Prozesse eingeleitet haben. Genau wie oben können wir Formel (3) als die Fouriertransformierte der Summe von drei unabhängigen Lévy-Prozessen auffassen, deren charakteristische Funktion durch  $u \mapsto \exp(iub(h)t)$ ,  $u \mapsto \exp(-\frac{1}{2}u^2 ct)$  bzw.  $u \mapsto \exp(\int (e^{iux} - 1 - iuh(x))F(dx)t)$  gegeben ist. Die ersten beiden Teile haben wir schon kennengelernt. Sie gehören zu einer deterministischen Funktion und zu einer Brownschen Bewegung. Im Falle  $F(\mathbb{R}) < \infty$  können wir  $h(x) = 0$  für alle  $x$  wählen, so daß wir auch in der dritten charakteristischen Funktion einen guten Bekannten wiedererkennen. Sie gehört zu einem Prozeß, der mit der Intensität  $F(\mathbb{R})$  gemäß der Sprungverteilung  $\frac{1}{F(\mathbb{R})}F$  springt und zwischen den Sprüngen konstant bleibt. Abb. 11 veranschaulicht an einem Beispiel, wie sich die drei Bestandteile zu einem komplizierteren Lévy-Prozeß zusammensetzen.

Für allgemeines  $F$  und  $h$  führt jedoch dieser Ansatz nicht zum Ziel. Wir zerlegen daher den dritten Ausdruck weiter, indem wir das Integral als verallgemeinerte Summe vieler, möglicherweise infinitesimaler Beiträge der Form  $u \mapsto (e^{iux} - 1 - iuh(x))F(dx)t$  auffassen. Wir stellen uns einen Lévy-Prozeß mit Tripel  $(b(h), c, F)$  also als additive Überlagerung einer linearen Funktion, einer Brownschen Bewegung und unendlich vieler unabhängiger Prozesse mit einer charakteristischen Funktion der Form  $u \mapsto (e^{iux} - 1 - iuh(x))F(dx)t$  vor, wobei  $x$  die Laufvariable der Summe ist.

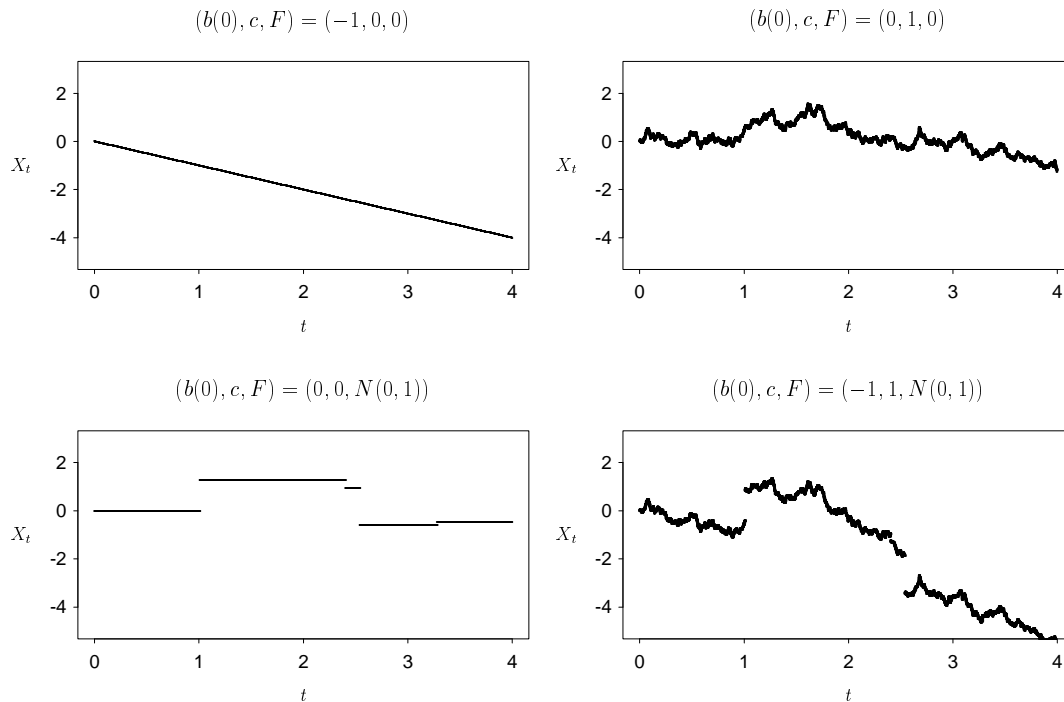


Abbildung 11: aus Einzelteilen zusammengesetzter Lévy-Prozeß

Wir wollen die Bausteine nun einzeln näher betrachten. Wie schon erwähnt ist der Lévy-Prozeß  $X$  mit dem Tripel  $(b, 0, 0)$ , also mit der charakteristischen Funktion  $u \mapsto \exp(iubt)$ , nichts anderes als eine deterministische lineare Funktion  $X_t = bt$  (Abb. 8). Wenden wir uns als nächstes der Brownschen Bewegung zu, also dem Lévy-Prozeß mit dem Tripel  $(0, c, 0)$  bzw. der charakteristischen Funktion  $\hat{X}_t(u) = \exp(-\frac{1}{2}u^2ct)$ . Wir haben bereits festgestellt, daß es sich dabei für festes  $\omega$  um eine stetige, aber nirgends differenzierbare Zitterbewegung handelt (Abb. 9). Wenn wir  $X_t$  als den Ort eines Teilchens zur Zeit  $t$  auffassen, wie schnell bewegt es sich dann im Mittel? Oben haben wir gesehen, daß die Ortsänderung in einem Intervall der infinitesimalen Länge  $dt$  die Größenordnung  $\sqrt{dt}$  besitzt. In einem Zeitraum der Länge 1 summiert sich dies auf zu einem Weg der Größenordnung  $\frac{1}{dt}\sqrt{dt} = \frac{1}{\sqrt{dt}} = \infty$ . Das Teilchen bewegt sich also gewissermaßen unendlich schnell. Den zurückgelegten Weg  $\sum_{n=1}^t |X_{ndt} - X_{(n-1)dt}|$ , d. h. die Summe der infinitesimalen absoluten Wegänderungen, nennt man auch die *Variation* von  $X$  auf dem Intervall  $[0, t]$ . Die Brownsche Bewegung ist also von unendlicher oder *unbeschränkter Variation*. Etwas anders sieht es aus, wenn wir stattdessen die quadratischen Ortsänderungen aufsummieren. Man nennt  $[X, X]_t := \sum_{n=1}^t (X_{ndt} - X_{(n-1)dt})^2$  die *quadratische Variation* von  $X$  auf  $[0, t]$ . Aus der früheren Betrachtung wissen wir, daß die Zuwächse

$X_{ndt} - X_{(n-1)dt}$  unabhängige, identische verteilte Zufallsvariablen bilden, nämlich das  $\sqrt{dt}$ -fache von Zufallsvariablen einer gegebenen Verteilung  $Q$  mit Erwartungswert 0 und Varianz  $c$ . Die quadratischen Zuwächse  $(X_{ndt} - X_{(n-1)dt})^2$  sind also unabhängige Zufallsvariablen mit Erwartungswert  $c dt$  und einer Varianz der Größenordnung  $(dt)^2$ . Durch Aufsummieren erhalten wir für den Erwartungswert der quadratischen Variation  $E([X, X]_t) = \int_0^t c dt = ct$ . Ebenso durch Aufsummieren ergibt sich, daß die Varianz von  $[X, X]_t$  lediglich von der Größenordnung  $\frac{1}{dt}(dt)^2 = dt$ , also 0 ist. Die quadratische Variation hängt also gar nicht vom Zufall  $\omega$  ab, sondern ist eine deterministische Zahl, nämlich  $[X, X]_t = ct$ . Wir haben somit neben der Gleichung  $\text{Var}(X_t) = ct$  eine zweite Interpretation des Parameters  $c$  der Brownschen Bewegung gefunden, die sich im Gegensatz zur ersten an jedem einzelnen Pfad des Prozesses ablesen läßt: Wenn wir die quadratischen Zuwächse über infinitesimale Zeitintervalle bis zur Zeit  $t$  aufsummieren, so erhalten wir  $ct$ . Der Parameter  $c$  läßt sich also als eine Art Zitterstärke des Wiener-Prozesses deuten. Im Falle  $c = 1$  spricht man übrigens von einer *Standard-Brownschen Bewegung*. Wiener-Prozesse mit beliebigem  $c$  kann man sich als Vielfaches einer solchen vorstellen, nämlich als  $\sqrt{c}$ -faches, wie man wegen  $(\sqrt{c}X_t)^\wedge(u) = \hat{X}_t(\sqrt{c}u)$  direkt an der charakteristischen Funktion ablesen kann.

Durch Aufaddieren einer linearen Funktion und einer Brownschen Bewegung erhalten wir einen Lévy-Prozeß mit Tripel  $(b, c, 0)$ , eine sogenannte *Brownsche Bewegung mit Drift*. Wenn wir uns auf stetige Lévy-Prozesse beschränken, haben wir es hier schon mit dem allgemeinsten Fall zu tun, denn die dritte Komponente im Lévy-Chintschin-Tripel tritt ja nur im Zusammenhang mit Sprüngen auf. Stetige Lévy-Prozesse sind also schon durch zwei Parameter eindeutig charakterisiert, nämlich ihren Erwartungswert  $\frac{1}{t}E(X_t) = b$  und ihre Varianz  $\frac{1}{t}\text{Var}(X_t) = c$ . An der charakteristischen Funktion  $\hat{X}_t = \exp(iubt - \frac{1}{2}u^2 ct)$  können wir auch direkt die Verteilung von  $X_t$  ablesen. Bekanntlich gehört zu dieser Fouriertransformierten gerade eine Normalverteilung  $N(bt, ct)$ . Die Zuwächse von stetigen Lévy-Prozessen sind also stets normalverteilt. Wenn man gar nur differenzierbare Lévy-Prozesse betrachten möchte, bleiben lediglich die deterministischen linearen Funktionen übrig. Für zufällige Funktionen stellt Differenzierbarkeit also in der Regel eine zu starke Regularitätsbedingung dar.

Wir wollen uns nun der dritten Klasse von Bausteinen zuwenden, nämlich Lévy-Prozessen  $X$  mit charakteristischer Funktion  $\hat{X}_t(u) = \exp((e^{iux} - 1 - iuh(x))\lambda t)$ , wobei  $x$  die feste Sprunghöhe des Prozesses und  $\lambda$  einen Intensitätsparameter bezeichnen. Für den allgemeinen Lévy-Prozeß mit Tripel  $(b(h), c, F)$  werden dann möglicherweise unendlich viele solcher Prozesse mit ggf. infinitesimaler Intensität  $F(dx)$  aufaddiert, so daß ein Prozeß mit Sprüngen ganz verschiedener Höhe entsteht.

Wir gehen wieder ganz ähnlich vor wie in unserer anfänglichen Betrachtung von Lévy-Prozessen mit Sprüngen. Angenommen, ein Lévy-Prozeß  $X$  springt im Intervall der Länge  $dt$  mit Wahrscheinlichkeit  $\lambda dt$  um  $x$ , während er mit der großen Restwahr-

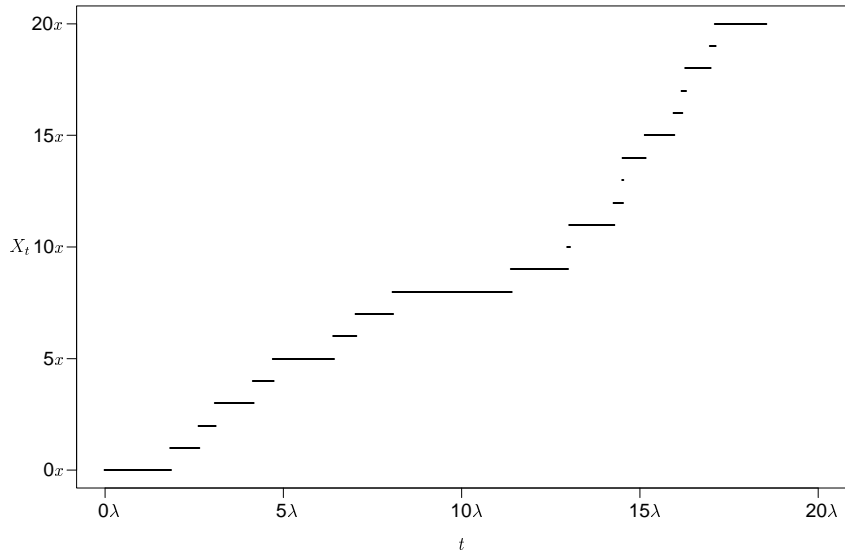


Abbildung 12: Lévy-Prozeß mit Tripel  $(0, 0, \lambda\varepsilon_x)$  für  $h(x) = 0$

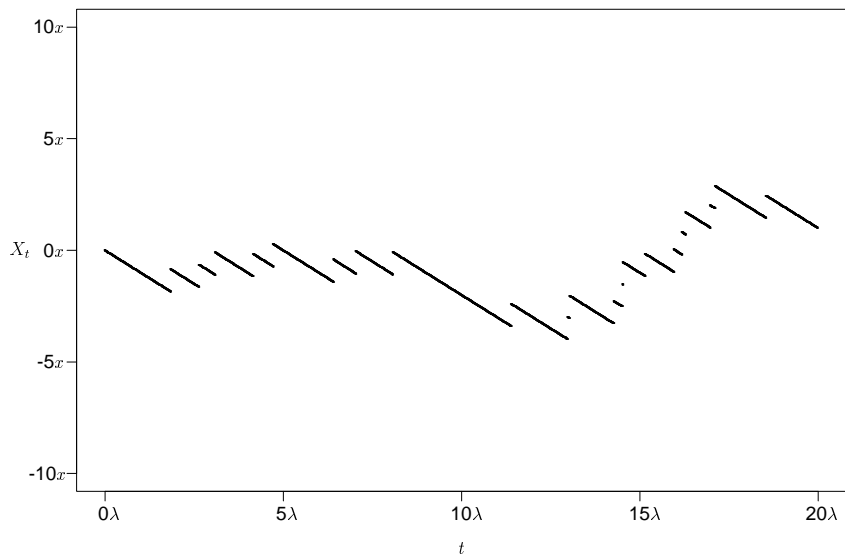


Abbildung 13: Lévy-Prozeß mit Tripel  $(0, 0, \lambda\varepsilon_x)$  für  $h(x) = x$



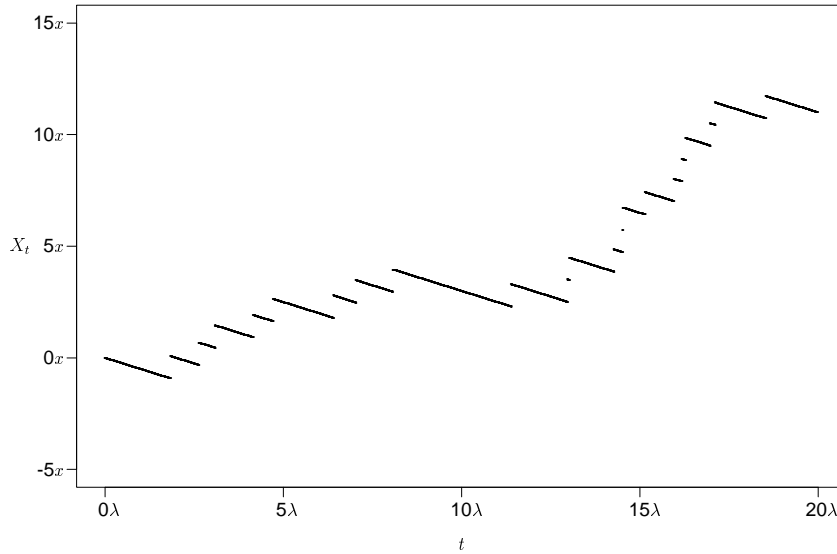


Abbildung 14: Lévy-Prozeß mit Tripel  $(0, 0, \lambda \varepsilon_x)$  für  $0 < h(x) < x$

scheinlichkeit  $1 - \lambda dt$  konstant bleibt. Die zugehörige charakteristische Funktion ergibt sich dementsprechend als  $\hat{X}_{dt}(u) = \lambda dt e^{iux} + (1 - \lambda dt)e^0 = 1 + (e^{iux} - 1)\lambda dt$ . Wegen  $1 + (e^{iux} - 1)\lambda dt \approx \exp((e^{iux} - 1)\lambda dt)$  für kleine  $dt$  und  $\hat{X}_t(u) = (\hat{X}_{dt}(u))^{\frac{t}{dt}}$  erhalten wir  $\hat{X}_t(u) = \exp((e^{iux} - 1)\lambda t)$ , also gerade die obige Fouriertransformierte im Fall  $h(x) = 0$ . Der zugehörige Lévy-Prozeß ist ein monoton wachsender (bzw. für  $x < 0$  monoton fallender) Prozeß, der nur die Werte  $0, x, 2x, 3x$  usw. annimmt, wobei dessen Sprungintensität, also die mittlere Zahl der Sprünge in einem Einheitsintervall,  $\lambda$  beträgt. Ein typischer Pfad ist in Abbildung 12 dargestellt. Für  $x = 1$  nennt man  $X$  einen *Poisson-Prozeß*, für  $x = 1, \lambda = 1$  einen *Standard-Poisson-Prozeß*. Einen Prozeß mit beliebigen  $x$  und  $\lambda$  erhält man daraus, indem man  $X$  mit  $x$  multipliziert – die Sprünge bekommen dadurch die Höhe  $x$  – und die Zeit  $t$  durch  $\lambda t$  ersetzt, wodurch sich die mittlere Zahl von Sprüngen im Einheitsintervall entsprechend verändert. Wie sieht nun die Verteilung eines solchen Prozesses aus? Da  $X_t$  nur die Werte  $0, x, 2x$  usw. annimmt, hat dessen Fouriertransformierte die Form  $\hat{X}_t(u) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iukx} P(X_t = kx)$ . Andererseits gilt  $\hat{X}_t(u) = e^{-\lambda t} \exp(e^{iux} \lambda t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{iukx}$ , woraus wir schließen, daß  $P(X_t = kx) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ . Für  $x = 1$  nennt man diese Verteilung die *Poisson-Verteilung* zum Parameter  $\lambda$ . Den Erwartungswert erhalten wir durch Differenzieren:  $E(X_t) = \frac{1}{i} \hat{X}'_t(0) = \frac{1}{i} e^{-\lambda t} i x \lambda t e^{\lambda t} = x \lambda t$ . Er steigt wie bei jedem integrierbaren Lévy-Prozeß linear in der Zeit an. Wir können diesen Anstieg dadurch kompensieren, daß wir von dem Prozeß die lineare Funktion  $t \mapsto x \lambda t$  subtrahieren. Die Pfade des entstehenden Prozesses, den wir wieder mit  $X$  bezeichnen, sehen dann aus wie in Abbildung 13. Im Falle  $x = 1$  nennt man  $X$  einen *kompensierten Poisson-*

*Prozeß*, für beliebiges  $x$  ist  $X$  das  $x$ -fache eines solchen. Da es sich um eine Summe unabhängiger Zufallsvariablen handelt, ergibt sich die Fouriertransformierte von  $X_t$  durch Multiplizieren der einzelnen charakteristischen Funktionen. Wir erhalten also  $\hat{X}_t(u) = \exp((e^{iux} - 1)\lambda t) \exp(-iux\lambda t) = \exp((e^{iux} - 1 - iux)\lambda t)$ . Dies entspricht gerade dem Fall  $h(x) = x$  in der obigen Betrachtung.

Die charakteristische Funktion  $\hat{X}_t(u) = \exp((e^{iux} - 1 - iuh(x))\lambda t)$  gehört also in der Tat zu einem sehr einfachen Lévy-Prozeß. Im Falle  $h(x) = 0$  haben wir es mit dem Vielfachen eines Poisson-Prozesses zu tun, den man auch als Summe  $X_t = \sum_{s \leq t} \Delta X_s$  seiner mit konstanter Rate  $\lambda$  eintreffenden Sprünge schreiben kann. Die Wahl  $h(x) = x$  bedeutet, daß die Sprünge so durch eine deterministische lineare Funktion kompensiert werden, daß die Zuwächse  $X_t - X_s$  Erwartungswert 0 haben. Dieses  $x$ -fache eines kompensierten Poisson-Prozesses können wir dementsprechend als  $X_t = \sum_{s \leq t} \Delta X_s - x\lambda t$  schreiben. Für allgemeines  $h$  erhalten wir ebenfalls einen Prozeß, der sich von dem  $x$ -fachen eines Poisson-Prozesses nur durch eine lineare Funktion unterscheidet; der Erwartungswert wird aber insbesondere für ein echt zwischen 0 und  $x$  liegenden Wert nur teilweise kompensiert (Abb. 14).

Einen Lévy-Prozeß mit dem Tripel  $(0, 0, F)$  fassen wir somit als Summe von Vielfachen von Poisson-Prozessen auf, deren Sprünge je nach Sprunghöhe partiell kompensiert wurden. Im Falle  $(b(h), 0, F)$  kommt noch eine lineare Funktion  $t \mapsto b(h)t$  hinzu, für  $(b(h), c, F)$  ferner eine Brownsche Bewegung. Man beachte, daß die Anteile der einzelnen Poisson-Prozesse infinitesimal sein können, d. h. wir beobachten nur mit unendlich kleiner Wahrscheinlichkeit  $F(dx)$  im Zeitintervall  $[0, 1]$  einen Sprung der Höhe  $x$ . Da aber gewissermaßen unendlich viele solcher Prozesse „aufaddiert“ oder genauer aufintegriert werden, erhalten wir dennoch eine positive, möglicherweise sogar unendlich große mittlere Zahl  $F(\mathbb{R})$  von Sprüngen in einem Einheitszeitintervall. In der allgemeinen Theorie stochastischer Prozesse gibt es tatsächlich einen Integralbegriff, der zu einer Linearkombination unendlich vieler kompensierter oder unkompensierter Poisson-Prozesse gehört.

Wir haben schon erwähnt, daß die Abschneidefunktion  $h(x) = x$  (für alle  $x$ ) zwar oft, aber nicht immer gewählt werden kann. In den Ausnahmefällen können wir uns  $X$  also nicht nur aus Vielfachen kompensierter Poisson-Prozesse zusammengesetzt denken. Ebenso kann die Wahl  $h(x) = 0$  für alle  $x$  zu Problemen führen. In solchen Fällen führt die Vorstellung einer Summe von Vielfachen gewöhnlicher, also unkompensierter Poisson-Prozesse in die Irre. Wir werden später noch darauf zu sprechen kommen, wann diese Fälle auftreten.

Zunächst aber wollen wir uns nach so viel theoretischer Kost einige Beispiele anschauen. Da wir lineare Funktionen zur Genüge aus der Schule kennen und uns auch von der Brownschen Bewegung schon ein Bild gemacht haben, betrachten wir Prozesse mit verschiedenen Lévy-Maßen  $F$ . Unter diesen sind uns die Poisson-Prozesse

inzwischen bestens vertraut, die im unkompensierten Fall zudem das geeignete Modell für Zählvorgänge gleichmäßig eintreffender Ereignisse bilden (z. B. Kunden in einem Geschäft, Anrufe bei einer Telefonzentrale). Einen Poisson-Prozeß erhält man übrigens auch, wenn man die bis zur Zeit  $t$  auftretenden Sprünge eines beliebigen anderen Lévy-Prozesses zählt, sofern dieser nicht gerade unendlich oft springt. Daß diese Anzahl mit dem Parameter  $\lambda$  poisson-verteilt ist, haben wir schon festgestellt. Wie sieht es aber mit der Wartezeit auf den ersten Sprung aus? Die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(X_{t+dt} = 1 | X_t = 0)$  dafür, daß der erste Sprung im infinitesimalen Intervall  $(t, t+dt]$  auftritt, beläuft sich auf  $\lambda dt$ . Anders formuliert heißt das  $P(X_{t+dt} = 0) = P(X_{t+dt} = 0 | X_t = 0)P(X_t = 0) = (1 - P(X_{t+dt} = 1 | X_t = 0))P(X_t = 0) = (1 - \lambda dt)P(X_t = 0)$  und somit  $\frac{dP(X_t=0)}{dt} = \frac{P(X_{t+dt}=0)-P(X_t=0)}{dt} = -\lambda P(X_t = 0)$ . Der geübte Mathematiker erkennt darin die Differentialgleichung einer Exponentialfunktion. Wegen des Anfangswertes  $P(X_0 = 0) = 1$  erhalten wir also  $P(T > t) = P(X_t = 0) = e^{-\lambda t}$ , wobei  $T$  die Wartezeit auf den ersten Sprung des Poissonprozesses  $X$  (oder eines beliebigen Lévy-Prozesses  $X$  mit Gesamtsprungintensität  $F(\mathbb{R}) = \lambda$ ) bezeichnet. Die Verteilung von  $T$  mit der Verteilungsfunktion  $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$  bzw. der Lebesgue-Dichte  $t \mapsto \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$  für  $t \in \mathbb{R}_+$  nennt man *Exponentialverteilung* zum Parameter  $\lambda$ . Da ein Lévy-Prozeß unabhängige Zuwächse besitzt, kann das Warten auf den ersten Sprung ähnlich zermürbend sein wie das Warten auf die erste 6 beim Mensch-ärgere-Dich-nicht-Spiel. Die Tatsache, daß man schon lange darauf wartet, erhöht nicht die Wahrscheinlichkeit, es im nächsten Augenblick zu schaffen.

Doch nun zu konkreten Beispielen. Betrachten wir zunächst die Simulation kumulierter Versicherungsschäden in Abb. 2. Das Tripel bezüglich der Abschneidefunktion  $h(x) = 0$  lautet hier  $(0, 0, F)$ , wobei wir für  $F$  das Vielfache einer *Lognormal-Verteilung* gewählt haben, also der Verteilung von  $e^U$  für eine normalverteilte Zufallsvariable  $U$ . Hier haben wir etwas Willkür walten lassen, denn auch ganz andere endliche Lévy-Maße, deren Masse auf  $\mathbb{R}_+$  konzentriert ist, wären denkbar. Letztlich muß man durch statistische Untersuchungen herausfinden, welche Maße besonders gut zu echten Daten passen.

In Abb. 15 haben wir vier Lévy-Prozesse nebeneinandergestellt, die zur Modellierung von logarithmierten Wertpapierkursen vorgeschlagen wurden. In allen Fällen haben wir eine recht kleine Drift  $b$  (bzgl. der Abschneidefunktion  $h(x) = x$  für alle  $x$ ) gewählt. Die Pfade der ersten drei Prozesse stammen von Lévy-Prozessen ohne *Diffusionsanteil*  $c$ . Die zugehörigen Lévy-Maße besitzen die Lebesgue-Dichten  $x \mapsto \frac{\lambda}{|x|} \exp(\beta x - \alpha|x|)$  (*Varianz-Gamma-Prozeß*),  $x \mapsto e^{\beta x} \frac{\delta \alpha}{\pi|x|} K_1(\alpha|x|)$  (*Normal-invers-Gaußscher Prozeß* aus der Klasse der *verallgemeinerten hyperbolischen Prozesse*), und  $x \mapsto (\chi 1_{(0,\infty)}(x) + \xi 1_{(-\infty,0)}(x))|x|^{-(1+\alpha)}$  (*stabiler Prozeß*), wobei  $\lambda, \beta, \alpha, \delta, \chi, \xi$  geeignet gewählte Parameter sind und  $K_1$  eine modifizierte Besselfunktion bezeichnet. Das vierte Schaubild zeigt eine Brownsche Bewegung mit Drift. Auf den ersten Blick

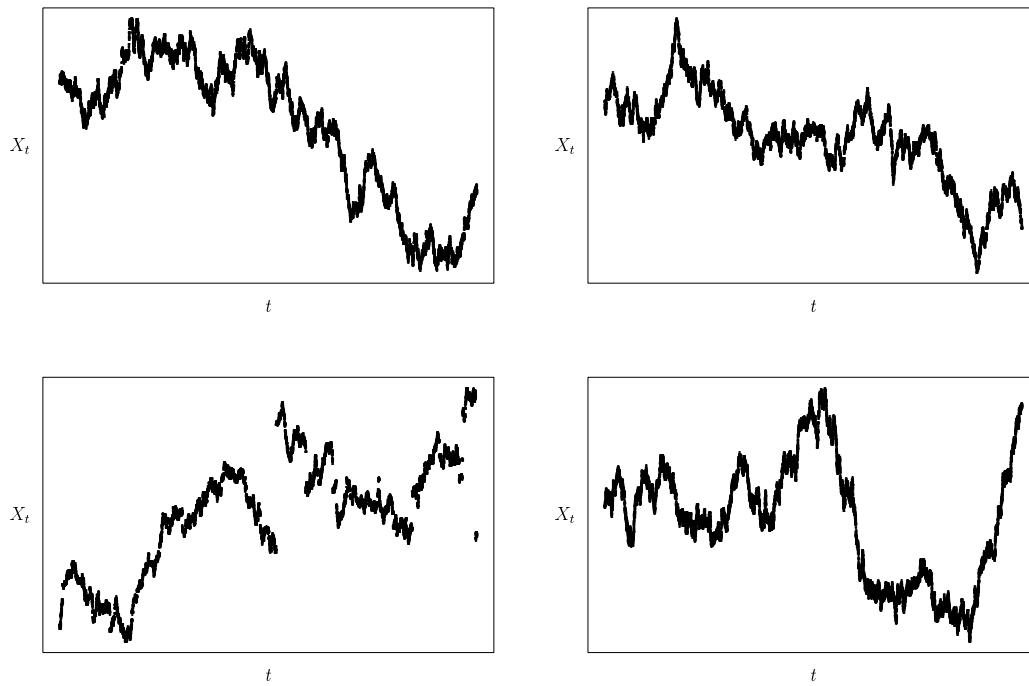


Abbildung 15: verschiedene Lévy-Prozesse

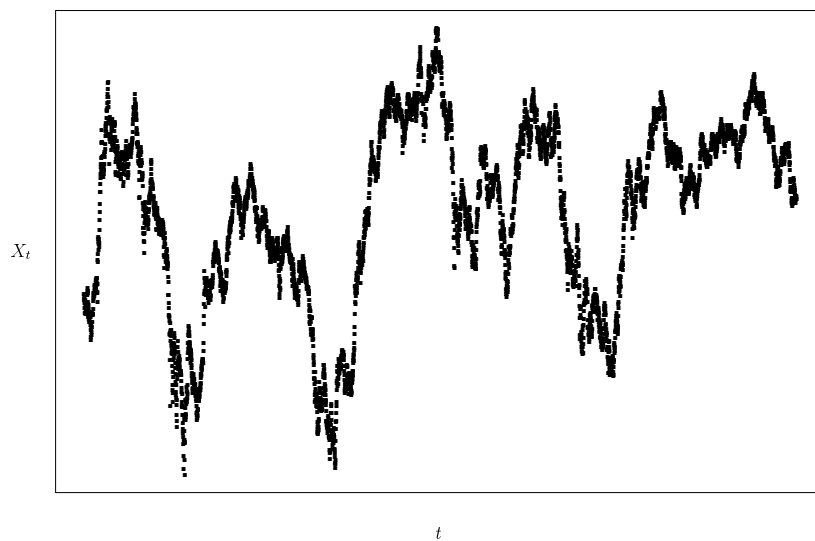


Abbildung 16: Logarithmus des DAX 1960-1980

sehen sich die vier Prozesse sehr ähnlich, und es scheint keineswegs offensichtlich, welcher Typ sich am besten zur Modellierung echter Finanzdaten wie etwa in Abb. 16 eignet. Dennoch verhalten sich diese vier zum Teil sehr unterschiedlich. Im Gegensatz zu den jeweils übrigen drei hat der erste Pfade von beschränkter Variation, der dritte unendliche Varianz und der vierte stetige Pfade.

Wenn man von der Drift absieht, gehört der dritte oben ausgewählte Prozeß zur Klasse der *strikt stabilen* Prozesse, zu denen auch die Brownsche Bewegung zählt und die sich durch ihre Skalierungseigenschaften auszeichnen. Wir betrachten sie der Einfachheit halber nicht in aller Allgemeinheit und beginnen mit dem Wiener-Prozeß als Beispiel. Wenn wir für eine Brownsche Bewegung  $X$  mit Lévy-Chintschin-Tripel  $(0, c, 0)$  einen *reskalierten* Prozeß  $Y_t^{(a)} := \sqrt{a}X_{at}$  mit  $a > 0$  anschauen, so erhalten wir  $\hat{Y}_t^{(a)}(u) = \hat{X}_{at}(\frac{u}{\sqrt{a}}) = \exp(-\frac{1}{2}u^2ct) = \hat{X}_t(u)$ , d. h.  $Y^{(a)}$  ist wiederum ein Lévy-Prozeß mit derselben Verteilung wie  $X$ . Ganz ähnlich verhalten sich Prozesse, deren Lévy-Maß eine Lebesgue-Dichte der Form  $x \mapsto Mx^{-(1+\alpha)}$  besitzt, wobei  $M > 0$  und der Stabilitätsindex  $\alpha \in (0, 2)$  gegebene Parameter sind. In diesem Fall müssen wir jedoch in der Form  $Y_t^{(a)} := a^{\frac{1}{\alpha}}X_{at}$  reskalieren. Pfade strikt stabiler Prozesse sind also *selbstähnlich*, d. h. sie sehen bei verschiedener Vergrößerung betrachtet ähnlich aus, sofern man die Koordinatenachsen im richtigen Verhältnis zueinander streckt. Beispiele für Pfade stabiler Prozesse finden sich in Abb. 17 - 19. Der neben der Brownschen Bewegung bekannteste stabile Prozeß ist der *Cauchy-Prozeß* mit der charakteristischen Funktion

$$\hat{X}_t(u) = \exp\left(\int (e^{iux} - 1 - iux1_{\{|x|\leq 1\}})\frac{1}{x^2}dx\right) = e^{-|u|},$$

der zum Stabilitätsindex  $\alpha = 1$  gehört.

Wenn wir schon beim Thema Reskalierung angekommen sind, können wir auch gleich noch untersuchen, wie sich ein beliebiger Lévy-Prozeß über sehr lange Zeiträume verhält. Abb. 20 zeigt exemplarisch eine Brownsche Bewegung mit Drift und einen Poisson-Prozeß jeweils über ein kurzes und ein sehr langes Zeitintervall. Auf lange Sicht scheinen diese Prozesse wie eine deterministische lineare Funktion auszusehen. Dieses Verhalten ist durchaus typisch für eine große Klasse von Lévy-Prozessen  $X$  und läßt sich auch genauer mathematisch fassen. Wenn wir die Zeit- und die Raumachse mit demselben Faktor  $a$  reskalieren, erhalten wir den Prozeß  $X^{(a)}$  mit  $X^{(a)} = \frac{1}{a}X_{at}$ . Falls wir die Abschneidefunktion  $h(x) = x$  wählen dürfen, ergibt sich dessen charakteristische Funktion aus Formel (2) zu  $\hat{X}_t^{(a)}(u) = \hat{X}_{at}(\frac{u}{a}) = \exp(i\tilde{b}ut - \frac{1}{2a}cu^2t + \int (a(e^{\frac{iux}{a}} - 1 - \frac{iux}{a})F(dx)t)$ . Für  $a \rightarrow \infty$  konvergieren nun sowohl  $\frac{1}{2a}cu^2t$  als auch  $a(e^{\frac{iux}{a}} - 1 - \frac{iux}{a}) \approx a\frac{-u^2x^2}{2a^2}$  gegen 0, so daß für große  $a$  die Fouriertransformierte  $u \mapsto \exp(i\tilde{b}ut)$  der linearen Funktion  $t \mapsto \tilde{b}t$  als dominierender Term übrigbleibt, wobei  $\tilde{b} = \frac{E(X_t)}{t}$ . In der Wahrscheinlichkeitstheorie spricht man in diesem Zusammenhang von der *Konvergenz in Verteilung* des Prozesses  $X^{(a)}$  gegen die lineare Funktion

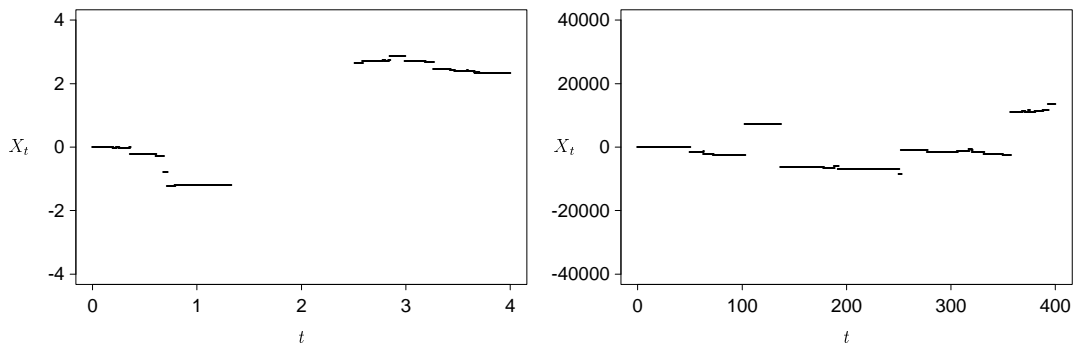


Abbildung 17: stabiler Prozeß für  $\alpha = 0,5$

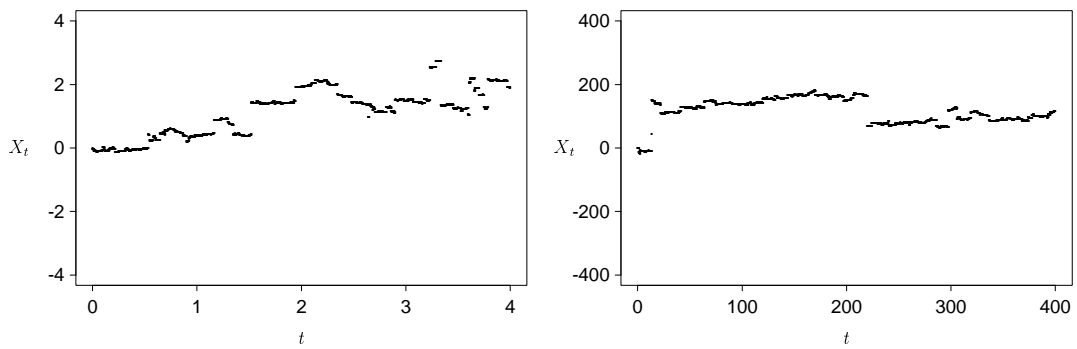


Abbildung 18: stabiler Prozeß für  $\alpha = 1$

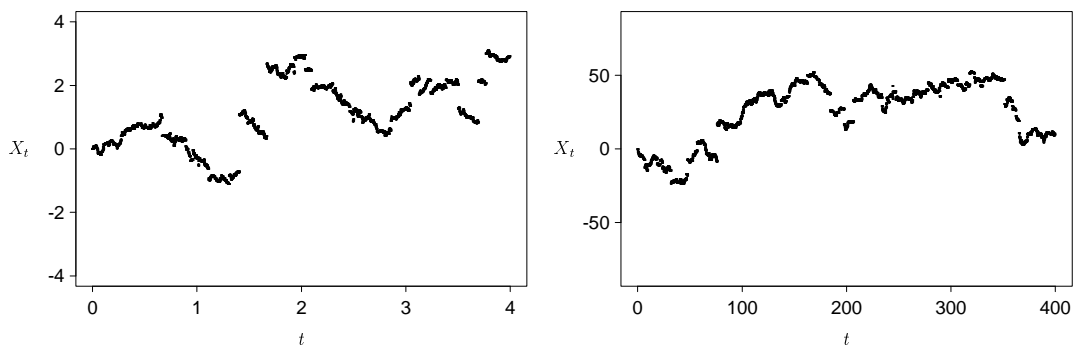


Abbildung 19: stabiler Prozeß für  $\alpha = 1,5$

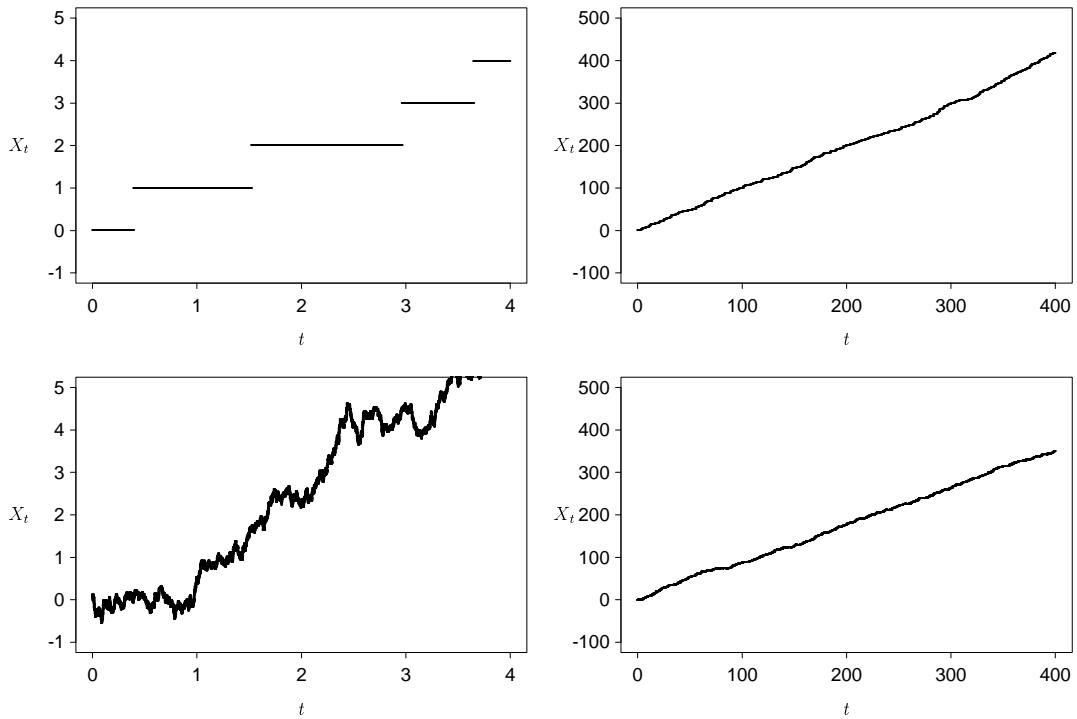


Abbildung 20: Brownsche Bewegung mit Drift und Poisson-Prozeß bei unterschiedlicher Beobachtungsdauer

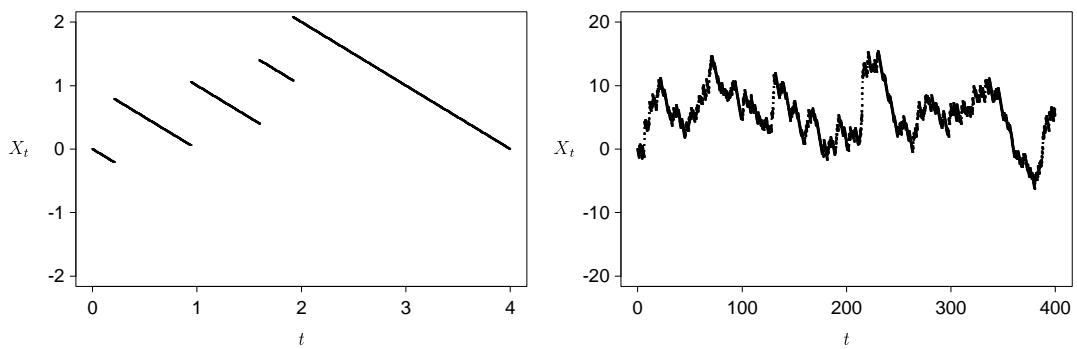


Abbildung 21: kompensierter Poisson-Prozeß bei unterschiedlicher Beobachtungsdauer

$t \mapsto \tilde{b}t$ . Dieser Effekt, daß sich der Zufall langfristig „ausmittelt“, erklärt auch, warum stochastische Phänomene in der Praxis mitunter ohne großen Schaden als deterministisch aufgefaßt werden können. Doch aufgefaßt: Nicht jeder Lévy-Prozeß benimmt sich auf lange Sicht so zahm, wie man am Beispiel des Cauchy-Prozesses in Abb. 18 sieht. Das kann uns auch nicht überraschen, denn wir haben diesen Prozeß ja gerade als einen solchen hervorgehoben, der bei dieser Reskalierung der Achsen seine charakteristische Funktion und damit sein typisches Aussehen nicht ändert.

Für Prozesse ohne oder mit nahezu verschwindender Drift  $\tilde{b}$  hingegen erscheint die Stauchung der Ortsachse um denselben Faktor  $a$  wie die Zeitachse vielleicht etwas übertrieben, da von ihnen im Grenzfall nur noch die Nullfunktion übrigbleibt, die letztlich keine Information mehr enthält. Hier können wir es einmal mit dem vorsichtigeren Faktor  $\sqrt{a}$  für die Ordinate versuchen, d. h. wir betrachten den Prozeß  $Y^{(a)}$  mit  $Y_t^{(a)} = \frac{1}{\sqrt{a}}X_{at}$  für große  $a$ . Im Fall  $\tilde{b} = 0$  erhalten wir aus Formel (2)  $\hat{Y}_t^{(a)}(u) = \hat{X}_{at}(\frac{u}{\sqrt{a}}) = \exp((-\frac{1}{2}cu^2 + \int a(e^{\frac{iux}{\sqrt{a}}} - 1 - \frac{iux}{\sqrt{a}})F(dx))t)$ . Wegen  $a(e^{\frac{iux}{\sqrt{a}}} - 1 - \frac{iux}{\sqrt{a}}) \approx a\frac{(iux)^2}{2a} = -\frac{1}{2}u^2x^2$  konvergiert diese Fouriertransformierte für große  $a$  gegen die Funktion  $u \mapsto \exp(-\frac{1}{2}(c + \int x^2F(dx))u^2t)$ , wobei  $c + \int x^2F(dx) = \frac{\text{Var}(X_t)}{t}$ . Darin erkennen wir die charakteristische Funktion eines Wiener-Prozesses. Prozesse ohne (oder mit sehr kleiner) Drift sehen also auf lange Sicht einer Brownschen Bewegung sehr ähnlich, wie wir in Abb. 21 am Beispiel eines kompensierten Poisson-Prozesses tatsächlich beobachten können. Im verkleinerten Maßstab werden die Sprünge kleiner und kleiner und erscheinen uns letztlich nur noch als stetige Zitterbewegung. Dies wiederum erklärt, warum die Brownsche Bewegung oft auch dann als mathematisches Modell herangezogen wird, wenn es sich eigentlich um ein unstetiges Phänomen handelt. Diese vereinfachende Sichtweise hat zudem den Vorteil, daß wir kein komplexes, hochdimensionales Objekt wie das Lévy-Maß  $F$  zu bestimmen brauchen, sondern nur die Gesamtvarianz  $c + \int x^2F(dx)$ . Doch auch hier ist wieder Vorsicht am Platze: Lévy-Prozesse mit  $\text{Var}(X_t) = \infty$  verhalten sich nicht so gutmütig, was man schon daran ablesen kann, daß  $\int x^2F(dx)$  nicht existiert.

Nach diesen Grenzbetrachtungen wollen wir auf Eigenschaften von Lévy-Prozessen zu sprechen kommen, die man recht direkt an ihrem Tripel ablesen kann. Darunter fallen zum einen Momente der Zufallsvariablen  $X_t$  und zum anderen das analytische Verhalten der Pfade  $X(\omega)$ . Zunächst betrachten wir die Momente, d. h.  $E(X_t)$ ,  $E(X_t^2)$  usw. Wenn wir die charakteristische Funktion als  $\hat{X}_t(u) = \exp(t\psi(u))$  schreiben, lassen sich wegen  $E((X_t)^k) = \frac{1}{i^k}\hat{X}_t^{(k)}(0)$  die  $k$ -ten Momente für  $k = 1, 2, 3, \dots$  recht einfach berechnen, sofern wir die nötigen Ableitungen von  $\psi$  kennen. Wir erhalten z. B.  $E(X_t) = \frac{1}{i}\psi'(0)t$  und  $E(X_t^2) = -\psi''(0)t - (\psi'(0))^2t^2$ . Für das  $k$ -te Moment ergibt sich allgemein ein Polynom in  $\psi'(0), \psi''(0), \dots, \psi^{(k)}(0)$ . Die Ableitungen von  $\psi(u) = iub(h) - \frac{1}{2}u^2c + \int (e^{iux} - 1 - iuh(x))F(dx)$  an der Stelle 0 wiederum lauten



Eigenschaften des	
Prozesses	Lévy-Chintschin-Tripels
$E( X_t ^p) < \infty$ $E(\exp(pX_t)) < \infty$	$\int_{\{ x  \geq 1\}}  x ^p F(dx) < \infty$ $\int_{\{x \geq 1\}} e^{px} F(dx) < \infty$
Differenzierbarkeit Stetigkeit endlich viele Sprünge auf $[0, t]$ Pfade von beschränkter Variation	$c = 0, F = 0$ $F = 0$ $F([-1, 1]) < \infty$ $\int_{\{ x  < 1\}}  x  F(dx) < \infty$

Tabelle 1: Momente und Pfadeneigenschaften

$\psi'(0) = i(b(h) + \int (x - h(x))F(dx))$ ,  $\psi''(0) = i^2(c + \int x^2 F(dx))$ ,  $\psi^{(k)} = i^k \int x^k F(dx)$  für  $k = 3, 4, \dots$ . Wir erhalten also z. B.

$$E(X_t) = \left( b + \int (x - h(x))F(dx) \right) t$$

und

$$\text{Var}(X_t) = E(X_t^2) - (E(X_t))^2 = \left( c + \int x^2 F(dx) \right) t.$$

Für höhere Momente ergeben sich entsprechend komplizierte Ausdrücke. Exponentielle Momente  $E(e^{pX_t})$  mit  $p > 0$  erhalten wir wegen  $\hat{X}_t(\frac{p}{i}) = E(e^{pX_t})$  noch einfacher aus der charakteristischen Funktion. Einsetzen ergibt

$$E(e^{pX_t}) = \exp \left( \left( pb(h) + \frac{1}{2}p^2c + \int (e^{px} - 1 - ph(x))F(dx) \right) t \right).$$

Man beachte jedoch, daß die höheren und erst recht die exponentiellen Momente von  $X_t$  nicht zu existieren brauchen. Aus der obigen Betrachtung erkennt man, daß in die Berechnung von  $E(X_t^k)$  das entsprechende  $k$ -te Moment  $\int x^k F(dx)$  von  $F$  eingeht. Entsprechend taucht ein exponentielles Moment von  $F$  in der Formel für  $E(e^{pX_t})$  auf. Die Existenz dieser Integrale hängt von dem Abfall von  $F$  für große  $|x|$  ab. In der Tat kann man zeigen, daß  $X_t^k$  genau dann integrierbar ist, wenn  $\int |x|^k 1_{\{|x| \geq 1\}} F(dx) < \infty$  gilt. Ebenso ist  $E(e^{pX_t})$  genau dann endlich, wenn dies für  $\int e^{px} 1_{\{x \geq 1\}} F(dx)$  gilt. Zusammengefaßt läßt sich also sagen, daß die Existenz höherer Momente eines Lévy-Prozesses vom Verhalten des Lévymaßes für große  $|x|$  abhängt. Insbesondere besitzt ein stetiger Lévy-Prozeß ( $F = 0$ ) Momente beliebiger (auch exponentieller) Ordnung.

Wir kommen nun auf die analytischen Pfadeneigenschaften zu sprechen. Wir haben schon erwähnt, daß nur die Brownsche Bewegung mit Drift (d. h.  $F = 0$ ) stetige Pfade besitzt und differenzierbare sogar nur bei deterministischen Lévy-Prozessen (d. h.  $c = 0, F = 0$ ) auftreten. Was läßt sich über die Sprünge auf einem gegebenen Intervall  $[0, t]$  aussagen? Daß der Prozeß im Mittel  $tF(\mathbb{R})$  Sprünge auf  $[0, t]$  besitzt, wissen wir

bereits. Im Falle  $F(\mathbb{R}) < \infty$  springt also der Prozeß auf jedem endlich langen Intervall nur endlich oft. Wegen  $F(\mathbb{R} \setminus [-1, 1]) < \infty$  genügt auch die scheinbar schwächere Bedingung  $F([-1, 1]) < \infty$ . Man kann sogar zeigen, daß auch die Umkehrung gilt: Im Fall  $F([-1, 1]) = \infty$  besitzt fast jeder Pfad auf jedem noch so kurzen Intervall unendlich viele Sprungstellen.

Selbst wenn der Prozeß unendlich oft springt, kann man seine Sprünge auf einem Intervall  $[0, t]$  bisweilen aufsummieren, d. h.  $\sum_{s \leq t} \Delta X_s$  existiert. Damit eine solche Summe mit unendlich vielen von 0 verschiedenen Summanden überhaupt wohldefiniert ist, sollte die Bedingung  $\sum_{s \leq t} |\Delta X_s| < \infty$  gelten. Da es nur endlich viele große Sprünge (etwa größer als 1) gibt, reicht es zu prüfen, ob  $\sum_{s \leq t} |\Delta X_s| 1_{\{|\Delta X_s| \leq 1\}}$  endlich ist. Dessen Erwartungswert kann man wieder mit Hilfe des Lévy-Maßes bestimmen. Da  $tF(\{x\})$  die mittlere Zahl an Sprüngen der Größe  $x$  ist, ergibt sich durch Aufintegrieren nach  $x$  gerade  $t \int_{\{|x| \leq 1\}} |x| F(dx)$  als Erwartungswert von  $\sum_{s \leq t} |\Delta X_s| 1_{\{|\Delta X_s| \leq 1\}}$ . Die Sprünge des Prozesses bis zur Zeit  $t$  lassen sich also aufaddieren, falls  $\int_{\{|x| \leq 1\}} |x| F(dx)$  endlich ist. Auch hier gilt wieder die Umkehrung: Im Falle  $\int_{\{|x| \leq 1\}} |x| F(dx) = \infty$  ist dies bei fast keinem Pfad möglich. Anders formuliert: Bei Lévy-Prozessen sind die Pfade genau dann von beschränkter Variation, wenn  $c = 0$  und  $\int_{\{|x| \leq 1\}} |x| F(dx) < \infty$  gilt.

In Tabelle 1 haben wir die obigen Ergebnisse zusammengefaßt. Über die Momente des Prozesses – d. h. das für feste  $t$  über alle  $\omega$  gemittelte Verhalten – entscheidet der Abfall des Lévymaßes für große  $|x|$ . Die Pfadeigenschaften hingegen – also das Verhalten von  $X$  für festes  $\omega$  als Funktion von  $t$  betrachtet – kann man am Diffusionskoeffizienten  $c$  und dem Anstieg des Lévy-Maßes für kleine  $|x|$  ablesen.

Anhand der Bedingungen in Tabelle 1 wird nun auch verständlicher, wann die einfachen Abschneidefunktionen  $h(x) = x$  bzw.  $h(x) = 0$  für alle  $x$  gewählt werden können. In der Herleitung der Lévy-Chintschin-Formel haben wir begründet, daß wir  $h(x) = x$  nur im Falle  $\int_{\{|x| \geq 1\}} |x| F(dx) < \infty$  verwenden dürfen. Dies ist aber gleichbedeutend damit, daß der Lévy-Prozeß integrierbar ist im Sinne von  $E(|X_t|) < \infty$ . Analog dazu kann man sich überlegen, daß Formel (2), also die Abschneidefunktion  $h(x) = 0$ , genau dann gewählt werden kann, wenn  $\int_{\{|x| \leq 1\}} |x| F(dx)$  endlich ist, was wiederum gerade bedeutet, daß die Sprünge von  $X$  aufsummiert werden können. Das erklärt nun auch, warum man sich  $X$  nicht als Summe unkompensierter Poisson-Prozesse vorstellen sollte, falls die Lévy-Chintschin-Darstellung mit  $h(x) = 0$  nicht möglich ist.

Zu guter Letzt wollen wir noch kurz auf mehrdimensionale Lévy-Prozesse  $X$  eingehen, d.h.  $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$  hat Werte in  $\mathbb{R}^d$  statt  $\mathbb{R}$ . Vieles von den obigen Ausführungen überträgt sich sinngemäß auf diesen allgemeineren Fall, so daß wir uns darauf

beschränken, die zugehörige Lévy-Chintschin-Formel anzugeben. Sie lautet

$$\hat{X}_t(u) = \exp \left( \left( iu^\top b(h) - \frac{1}{2} u^\top c u + \int (e^{iu^\top x} - 1 - iu^\top h(x)) F(dx) \right) t \right)$$

für  $u \in \mathbb{R}^d$ , wobei  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  wiederum eine Abschneidefunktion bezeichnet. Die Drift  $b(h)$  ist nun ein Vektor in  $\mathbb{R}^d$ , dessen Komponenten für die einzelnen Koordinatenprozesse  $X^1, \dots, X^d$  stehen. Ebenso erstaunt es wenig, daß das Lévy-Maß jetzt ein Maß auf  $\mathbb{R}^d$  ist. Eher überrascht uns vielleicht, daß der Diffusionsparameter  $c \in \mathbb{R}_+$  im Mehrdimensionalen einer symmetrischen, nichtnegativ definiten  $d \times d$ -Matrix weicht. Wenn wir uns allerdings erinnern, daß  $c$  für die Varianz  $\frac{\text{Var}(X_t)}{t}$  einer Brownschen Bewegung steht und daß der Varianz im Mehrdimensionalen die Kovarianzmatrix entspricht, erscheint dies schon weniger verwunderlich. Auch die pfadweise Erklärung des Parameters  $c$  läßt sich übertragen: Während  $ct$  bei einer eindimensionalen Brownschen Bewegung als quadratische Variation  $\sum_{n=1}^{\frac{t}{dt}} (X_{ndt} - X_{(n-1)dt})^2$  an jedem Pfad in Erscheinung tritt, erhält man  $c^{ij}t$  bei einem mehrdimensionalen Wiener-Prozeß als sogenannte *quadratische Kovariation*  $\sum_{n=1}^{\frac{t}{dt}} (X_{ndt}^i - X_{(n-1)dt}^i)(X_{ndt}^j - X_{(n-1)dt}^j)$  der Pfade in  $\mathbb{R}^d$ .

Um unsere Einführung aber nicht allzu ermüdend werden zu lassen, wollen wir es damit bewenden lassen. Viel Wissenswertes zu Lévy-Prozessen findet man in dem Buch von Sato. Die auf den Lévy-Prozessen aufbauende allgemeinere stochastische Analysis wird in dem Buch von Jacod und Shiryaev behandelt.

## Literatur

- Jacod, J. und A. Shiryaev (1987). *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Berlin: Springer.
- Sato, K. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge: Cambridge University Press.